המכללה האקדמית יהודה ושומרון
פתרון למבחן דוגמא
מתמטיקה לכלכלנים ב'
סמסטר ב' תשס"ו 07.2006

שאלה 1. חקו את הפונקציה הבאה: $y=e^{2x}-e^{x}$

1) R – תחום ההגדרה

$$2)\ y'=2e^{2x}-e^{x}=e^{x}\left(2e^{x}-1\right)=0\Rightarrow \underline{e^{x}=\frac{1}{2}};\quad x=\ln\frac{1}{2}\qquad x=\ln 1-\ln 2;\quad x=-\ln 2$$

$$e^{x}\prec\frac{1}{2}(x\prec-\ln 2)\Rightarrow y'\prec 0\qquad e^{x}\succ\frac{1}{2}\Rightarrow y'\succ 0\Rightarrow \underline{x=-\ln 2}\ \ \min$$

$-\quad\quad +$

$-\ln 2$

$$y=e^{2x}-e^{x}=\left(e^{x}\right)^{2}-e^{x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\Rightarrow\left(-\ln 2,-\frac{1}{4}\right)$$ נקודת מינימום

$$3)\ f\left(0\right)=0;\qquad y=0\Rightarrow e^{2x}-e^{x}=0\quad e^{x}\left(e^{x}-1\right)=0\quad e^{x}=1\quad x=0\quad\left(0,0\right)$$ נקודות חיתוך עם הצירים

$$4)\ \lim_{x\to\infty}\left(e^{2x}-e^{x}\right)=\lim_{x\to\infty}e^{x}\left(e^{x}-1\right)=\infty$$

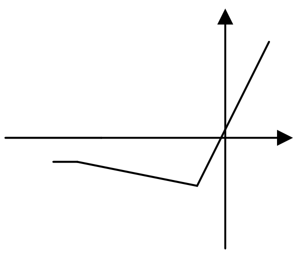
$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-e^{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^{\infty}}-\frac{1}{e^{\infty}}\right)=0\Rightarrow x\to-\infty, y=0$$ אסימפטוטה אופקית

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-e^{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e^{2x}}-\frac{1}{e^{x}}}{x}=0\Rightarrow$$ אס.משופעת לא קיימת

$$5)\ f''=\left(2e^{2x}-e^{x}\right)'=4e^{2x}-e^{x}=e^{x}\left(4e^{x}-1\right)=0\qquad e^{x}=\frac{1}{4};\underline{x=-\ln 4}$$ נקודת פיתול

$-\quad\quad +$

$-\ln 4$



שאלה 2. חשב 2 מתוך 3 האינטגרלים הבאים:

$$\int x\cdot\sqrt[3]{2-7x}dx=\int\frac{2-t^{3}}{7}\cdot t\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)t^{2}dt=\frac{-3}{49}\int\left(2t^{3}-t^{6}\right)dt=-\frac{6t^{4}}{49\cdot 4}+\frac{3t^{7}}{49\cdot 7}=-\frac{3\sqrt[3]{\left(2-7x\right)^{4}}}{98}+\frac{3\sqrt[3]{\left(2-7x\right)^{7}}}{343}=$$

$$=-\frac{3\left(2-7x\right)\sqrt[3]{\left(2-7x\right)}}{98}+\frac{3\left(2-7x\right)^{2}\sqrt[3]{\left(2-7x\right)^{7}}}{343}$$

$(\sqrt[3]{2-7x}=t$

$2-7x=t^{3}\Rightarrow x=\frac{2-t^{3}}{7};\qquad dx=-\frac{3}{7}t^{2}dt)$

ב.

$$\int\frac{x^5-x^3+1}{(x-1)x^3}dx=\int\frac{x^5-x^3+1}{x^4-x^3}dx=\int\left(x+1+\frac{1}{x^4-x^3}\right)dx=\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{1}{x^4-x^3}dx=\frac{x^2}{2}+x+$$

$$+\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx=\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|-\ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C$$

הסבר: אחרי חילוק $(x^5-x^3+1):(x^4-x^3)$ נקבל $x+1$

ושארית 1 זאת אומרת $\frac{x^5-x^3+1}{x^4-x^3}=x+1+\frac{1}{x^4-x^3}$

$$\left[\frac{1}{(x-1)x^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+\frac{D}{x^3}\right.$$

$$1=A\cdot x^3+B\cdot x^2(x-1)+C\cdot x(x-1)+D\cdot(x-1)$$

$$x=0\Rightarrow 1=-D;\underline{D=-1}$$

$$x=1\Rightarrow 1=A;\underline{A=1}$$

$$\cdot x^2\Rightarrow 0=-B+C$$

$$\cdot x\Rightarrow 0=-C+D\Rightarrow \underline{C}=D=\underline{-1};\underline{B}=C=\underline{-1}$$

$$\left.\int\frac{1}{x^4-x^3}dx=\int\frac{1}{x^3(x-1)}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx\ \right]$$

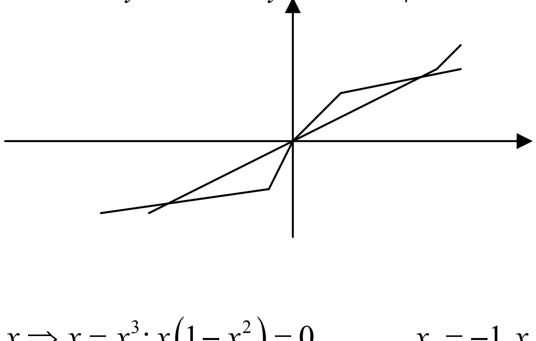
ג.

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\int\frac{1}{x^2}\ln x\,dx=-\frac{1}{x}\ln x-\int\left(-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)dx=-\frac{1}{x}\ln x+\int x^{-2}dx=-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+C$$

$$u=\ln x\qquad dv=\frac{1}{x^2}dx$$

$$du=\frac{1}{x}dx\qquad v=-\frac{1}{x}$$

<u>שאלה 3.</u> חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציה $y=x$ ו- $y=\sqrt[3]{x}$



גבולות: $x_1=-1,x_2=0,x_3=1$ $\quad$ $1)\ \sqrt[3]{x}=x\Rightarrow x=x^3;x(1-x^2)=0$

$$2)S_1=\int_0^1\left(\sqrt[3]{x}-x\right)dx=\left(\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-\frac{x^2}{2}\right)_0^1=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4};\qquad 3)S=2\cdot S_1=\frac{1}{2}$$

<u>שאלה 4.</u> העלות השולית בייצור x טון של מוצר מסוים הינה $MC(x)=2x+50$ ש"ח לטון.

א. מצא את $MC(10)$

$1)MC(10)=2\cdot 10+50=70$

$2)MC=C'\Rightarrow C=\int(2x+50)dx=x^2+50x+FC(x);FC(x)-$ העלות הקבוע

ב.ידועה כי העלות הכוללת ברמת ייצור של 10 יחידות , $TC(10)$ , הינה 700 ש"ח. מצא את העלות הקבועה , כלומר את $FC(x)$ . TC = C

$$\begin{cases}C(x)=x^2+50x+FC(x)\\ C(10)=700\end{cases}\Rightarrow 10^2+50\cdot 10+FC(x)=700\Rightarrow FC(x)=100$$

<u>שאלה 5.</u> העלות השולית בייצור x יחידות מוצר הינה $MC(x)=4x^3+b$ ש"ח ליחידה , כמו כן העלות הקבועה היא 243 ש'ח.

א. מצא כמה יחידות מוצר יש לייצר על מנת לקבל עלות ליחידה (עלות ממוצעת) מימימאלית.

$C'=MC\Rightarrow 1)C=\int(4x^3+b)dx;\qquad C(x)=x^4+bx+243$

$$2)\frac{C(x)}{x}=x^3+b+\frac{243}{x}$$

$$3)\left[\frac{C(x)}{x}\right]'=3x^2-\frac{243}{x^2}=\frac{3x^4-243}{x^2}=\frac{3(x^4-81)}{x^2}=0\Rightarrow x=3$$

$0\prec x\prec 3\Rightarrow f'\prec 0\qquad x\succ 3\Rightarrow f'\succ 0\Rightarrow x=3$ מינימום

ב. המפעל מוכר כל יחידה ב-p ש'ח. הראה כי ברמת הייצור שמצאת בסעיף א' יתקבל רווח ליחידה מקסימאלי.

$1)\Pi(x)=x\cdot p-x^4-bx-243$

$$2)\frac{\Pi(x)}{x}=p-x^3-b-\frac{243}{x}$$

$$3)\left[\frac{\Pi(x)}{x}\right]'=-3x^2+\frac{243}{x^2}=\frac{243-3x^4}{x^2}=\frac{3(81-x^2)}{x^2}=0\qquad x=3$$ מקסימום

<u>שאלה 6.</u> מפעל מייצר שני מוצרים A ו- B לפי הפרות בטבלה.

לפי הטבלה $C(x,y)=400x+500y$ . ההכנסה הכוללת ממכירה x יחידות מוצר A ו- y יחידות מוצר B הינה $R(x,y)=800x+900y+x^2-y^2$

א. המפעל מייצר ומוכר כעת 20 מוצרים ביום מסוג A ו-15 מוצרים ביום מסוג B.מנכ"ל המפעל ביקש מעובדיו לנגדיך את הייצור של אחד המוצרים ביחידה אחת ביום. מצא , בעזרת הפונקציות השוליות המתאימות , את התפוקה של איזה מוצר כדאי יותר למפעל להעלות על מנת להגדיל את הרווח היומי.

$$\Pi(x,y) = R(x,y) - C(x,y) = 800x - 900y - x^2 - y^2 - 400x - 500y = \underline{400x + 400y - x^2 - y^2}$$

$\Pi'_x = 400 - 2x \qquad \Pi'_{x=20} = 360$

$\Pi'_y = 400 - 2y \qquad \Pi'_{y=15} = 370 \Rightarrow$ עדיף להגדיל סוג B

ב.מצא כמה מוצרים מכל סוג על המפעל לייצר כדי לקבל רווח מקסימאלי.

$\Pi'_x = 400 - 2x = 0 \Rightarrow x = 200 \qquad \Pi''_{xx} = -2$

$\Pi'_y = 400 - 2y = 0 \Rightarrow y = 200 \qquad \Pi''_{yy} = -2; \Pi''_{xy} = 0;$

$\Pi''_{xx} \cdot \Pi''_{yy} - \left(\Pi''_{xy}\right)^2 = 4 \succ 0; \Pi''_{xx} = -2 \prec 0 \Rightarrow x = 200; y = 200$ נקודת מקסימום

<u>שאלה 7.</u> מצא את הנקודות הקריטיות של הפונקציה הבאה ומיין אותן.

$$\underline{f(x,y) = 2 - 6xe^x - 3e^x y^2}$$

I

$f'_x = -6e^x - 6xe^x - 3y^2e^x = -3e^x\left(2 + 2x + y^2\right) = 0$

$f'_y = -6e^x y = 0$

$$\begin{cases} 2 + 2x + y^2 = 0 \\ -6e^x y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(1+x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

II

$$f''_{xx} = -3e^x\left(2 + 2x + y^2\right) - 3e^x \cdot 2 = -3e^x\left(2 + 2x + y^2 + 2\right) = -3e^x\left(4 + 2x + y^2\right)$$

$$f''_{xy} = -6ye^x \qquad f''_{yy} = -6e^x$$

$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{6}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{6}{e} \end{vmatrix} = -\frac{6}{e} \cdot \left(-\frac{6}{e}\right) - 0 \succ 0; \qquad f''_{x^2} = -\frac{6}{e} \prec 0 \quad \Rightarrow \quad (-1,0)$ נקודת מקסימום

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - f''_{xy} \cdot f''_{yx}$$

$\left(f''_{xy} = f''_{yx}\right)$