

אוניברסיטת אריאל בשומרון

מבחן בהסתברות וסטטיסטיקה

הנדסה אזרחית.

תשפ"ד סמסטר א' מועד א' תאריך: 10.04.2024

מס' קורס: 1-4422010-2 חומר עזר: מחשבון לא גרפי ודף נוסחאות מצורף.

מרצים: ד"ר אליעזר הירשברג

מתרגלים: שי ביטון, אלכס סיטקין

זמן: 150 שעות.

יש לפתור סך הכול 5 שאלות מתוך 6:

שאלה מספר 1. (20 נקודות)

במפעל יש שתי מכונות. ההסתברות שבדיוק אחת מהן תפעל היא 0.7. ההסתברות ששתיהן תתקלקלנה היא 0.1. ההסתברות שהשנייה תפעל היא 0.6.
א. חשב את ההסתברות שהמכונה הראשונה תפעל.
ב. חשב את ההסתברות שרק המכונה השנייה תפעל.
ג. חשב את ההסתברות שהמכונה השנייה התקלקלה אם ידוע שרק אחת מהן פעלה.

שאלה מספר 2. (20 נקודות)

בוחרים ועד של 6 אנשים מתוך קבוצה של 7 גברים ו-8 נשים.
א. חשב את ההסתברות שיהיו יותר גברים מנשים בועד.
ב. חשב את ההסתברות שיהיו בדיוק 3 נשים בועד אם ידוע שיש לפחות גבר אחד בועד.

שאלה מספר 3. (20 נקודות)

הציונים בבגרות בסטטיסטיקה מתפלג נורמלית עם ממוצע 76. 10% מהסטודנטים קבלו ציון פחות מ-60.
א. חשב את אחוז הסטודנטים שקבלו ציון מעל 90.
ב. חשב את ציון המעבר אם ידוע ש-5% מהסטודנטים נכשלו.

שאלה מספר 4. (20 נקודות)

מטילים 4 קוביות.

- א. חשב את ההסתברות שהתוצאה מספר 6 התקבל בדיוק פעמיים.
ב. חשב את ההסתברות שהתוצאה מספר 6 התקבל בדיוק פעם אחת אם ידוע שהיו בדיוק 3 תוצאות זוגיות.
ג. חשב את ההסתברות לקבל 4 תוצאות שונות?
ד. חשב את ההסתברות לקבל שתי תוצאות שמופיעות בדיוק פעמיים?

שאלה מספר 5. (20 נקודות)

מכניסים 3 כדורים ל-3 קופסאות באופן מקרי. נגדיר משתנה מקרי X = מספר הכדורים שהוכנסו לקופסה הראשונה. תשב את התוחלת ואת השונות של X .

שאלה מספר 6. (20 נקודות)

מטילים קובייה עד שמקבלים תוצאה מספר 6.

- חשב את ההסתברות שבוצעו פחות מ-8 הטלות.
- חשב את ההסתברות שבוצעו מספר זוגי של הטלות.
- חשב את ההסתברות שבוצעו פחות מ-6 הטלות אם ידוע שבוצעו מספר זוגי של הטלות.
- נגדיר שני מאורעות A = בוצעו פחות מ-4 הטלות ו- B = בוצעו מספר אי זוגי של הטלות. בדוק אם A ו- B הם בלתי תלויים.

בהצלחה!!!

סטטיסטיקה תיאורית

סימנים בסיסיים לשימוש :

אורך האינטרוול	l	אמצע הקבוצה	$or \quad x'$ MP
צפיפות האינטרוול	d	גודל המדגם	N
ממוצע	$\bar{x}$	סכום אברים	Σ
חציון	M_e	שכיחות מוחלטת	f
השכיח	M_0	שכיחות מצטברת	F
סטיית תקן	σ	שכיחות יחסית	p
שונות	σ^2	ציון תקן	z_i

n - מספר קבוצות (מחלקות)

L_i - גבול תחתון של קטע i .

R_i - גבול עליון של קטע i .

$$x'_i = (L_{in} + R_i) / 2$$

מציאת טווח:

$$R = x_n - x_1 \quad (1)$$

(קיבוץ תצפיות לפי ערכים בודדים)

$$R = R_n - L_1 \quad (2)$$

(קיבוץ נתונים לפי קטעים).

$$p_i = \frac{f_i}{N}$$

$$d_i = \frac{f_i}{l_i},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x'_i \cdot f_i = \sum_{i=1}^n x'_i \cdot P_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum f_i \cdot (x'_i - \bar{x})^2 = \sum P_i \cdot (x'_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum f_i \cdot x_i'^2 - (\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (x'_i)^2 \cdot p_i - (\bar{x})^2$$

$$M_k(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x'_i)^k f_i = \sum_{i=1}^n (x'_i)^k \cdot P_i$$

$$\bar{X} = M_1(X)$$

$$\sigma^2 = M_2(X) - (M_1(X))^2$$

מציאת שכיח (קיבוץ תצפיות לפי קטעים)

איחוד של k קבוצות בגודל

$$Mo = L_i + \frac{d_i - d_{i-1}}{(d_i - d_{i-1}) + (d_i - d_{i+1})} \cdot l_i$$

i - קבוצת השכיח $(f_i \geq f_j, 1 \leq j \leq n)$

מציאת חציון (קיבוץ תצפיות לפי קטעים)

$$Me = L_i + \frac{l_i}{f_i} \times (\frac{N}{2} - F_{i-1})$$

i - קבוצת החציון $(F_{i-1} < \frac{N}{2} \text{ ו- } F_i > \frac{N}{2})$.

אם ניתן למצוא את i שעבורו $F_i = \frac{N}{2}$,

$$M_e = R_i$$

מציאת חציון (קיבוץ תצפיות לפי ערכים בודדים)

אם ניתן למצוא את i שעבורו $F_i > \frac{N}{2}$ ו- $F_{i-1} < \frac{N}{2}$.

$$M_e = x_i$$

אם ניתן למצוא את i שעבורו $F_i = \frac{N}{2}$,

$$M_e = (x_i + x_{i+1}) / 2$$

$$z_i = \frac{x'_i - \bar{x}}{\sigma}$$

אקסיומות ההסתברות

(1) תכונות כלליות של פונקציית הסתברות $P(A)$ כאשר A - מאורע כלשהו

Ω - מרחב מאורעות או אוסף כל התוצאות האפשריות של ניסוי או מאורע וודאי.

$$P(\Phi) = 0, \quad P(\Omega) = 1, \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

(2) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, כאשר $\bar{A}$ - מאורע משלים $(A \cup \bar{A} = \Omega)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (3)$$

(4) A, B מאורעות זרים אם $A \cap B = \Phi$ ומתקיים $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

נוסחאות שימושיות נוספות:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) \quad (5)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}), \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) \quad (6) \quad (\text{דה מורגן})$$

קומבינטוריקה

תמורות

$$P_n = n!; \quad P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

בחירות

	עם החזרה	בלי החזרה
סדר חשוב (חליפות)	n^k	$P_n^k = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
סדר לא חשוב (צירופים)		$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

הסתברות מותנית

$P(A/B)$ - קוראים: ההסתברות המותנה של מאורע A כאשר ידוע שהמאורע B התרחש (בקיצור, ההסתברות של A בתנאי B).

$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(B)}, \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

אם A, B מאורעות זרים אז מתקיים $P(A/B) = 0$

אם A, B מאורעות בלתי תלויים אז מתקיים $P(A/B) = P(A)$, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

אם A, B מאורעות תלויים אז מתקיים $P(A/B) \neq P(A)$, $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(A) = P(A/E_1) \cdot P(E_1) + \dots + P(A/E_n) \cdot P(E_n)$$

כאשר $E_1, E_2, \dots, E_n$ מאורעות זרים שאיחודם הוא כל המרחב Ω : $\sum_{i=1}^n P(E_i) = 1$

נוסחת בייז:

$$P(E_1/A) = \frac{P(A/E_1) \cdot P(E_1)}{P(A)} = \frac{P(A/E_1) \cdot P(E_1)}{P(A/E_1) \cdot P(E_1) + \dots + P(A/E_n) \cdot P(E_n)}$$

$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B) \quad \text{נוסחה נוספת:}$$

מומנטים למשתנה בדיד

תוחלת $E(x) = \sum x_i P(x_i)$, שונות $\text{Var}(x) = E(x^2) - (E(x))^2$
תכונות של תוחלת ושונות:

$$E(b \cdot X + a) = b \cdot E(X) + a, \quad \text{Var}(b \cdot X + a) = b^2 \cdot \text{Var}(X), \quad E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

נוסחת התוחלת השלמה

נתונים קבוצה שלמה של מאורעות זרים $\{A_1, \dots, A_n\}$. משתנה מקרי כלשהו אזי:
 $E(X) = E(X|A_1) \cdot P(A_1) + E(X|A_2) \cdot P(A_2) + \dots + E(X|A_n) \cdot P(A_n)$

התפלגות בינומית (ברנולי) $X \sim B(n, p)$

n - מספר ניסויים, p - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, $q = 1 - p$ - נסמן:

ההסתברות שמתוך n ניסויים יהיו בדיוק k הצלחות: $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

תוחלת ושונות של התפלגות בינומית: $E(X) = np$, $VAR(X) = npq$

התפלגות גיאומטרית (עד הצלחה ראשונה) $X \sim G(p)$

p - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, נסמן: $q = 1 - p$

ההסתברות שההצלחה הראשונה תתרחש בניסוי מס' k : $P(X = k) = q^{k-1} \cdot p$

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad VAR(X) = \frac{1-p}{p^2}, \quad P(X > k) = q^k, \quad P(X \leq k) = 1 - q^k$$

$$S = a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q} \quad (q < 1) \quad \text{סכום של סדרה הנדסית אינסופית}$$

התפלגות בינומית שלילית (מספר ניסיונות עד הצלחה מספר r) $X \sim NB(r, p)$

p - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, נסמן: $q = 1 - p$

ההסתברות לכך שההצלחה מספר r יבוא בניסוי מס' k : $P(X = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}$

$$E(X) = \frac{r}{p}, \quad VAR(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

הערה: התפלגות הגיאומטרית הוא מקרה פרטי של התפלגות בינומית שלילית, עם $r = 1$.

נתונים $X_1, X_2, \dots, X_r$ משתנים מקריים גיאומטריים בלתי תלויים כך ש- $X_i \sim G(p)$ עבור כל $1 \leq i \leq r$, אזי $\sum_{i=1}^r X_i \sim NB(r, p)$.

התפלגות היפרגאומטרית

באוכלוסייה N פריטים, מתוכם D פריטים מיוחדים. מוציאים מהאוכלוסייה n פריטים ללא החזרה. X = מספר פריטים מיוחדים שהוצאו.

ההסתברות שמתוך n פריטים יהיו k פריטים מיוחדים: $P(X = k) = \frac{C_D^k \cdot C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$

תוחלת ושונות:

$$E(X) = n \cdot \frac{D}{N} \quad VAR(X) = n \cdot \frac{D}{N} \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

התפלגות פואסון

התפלגות פואסון עם פרמטר λ : $X \sim P(\lambda)$

λ הוא המספר הממוצע של האירועים ליחידת זמן, $\lambda > 0$

ההסתברות שביחידת הזמן יתרחשו בדיוק k אירועים היא: $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$

תוחלת ושונות: $VAR(X) = \lambda$, $E(X) = \lambda$

קירוב פואסון לבינומית (עבור n גדול ו p קטן) מציבים $\lambda = np$

משתנה מקרי רציף

$f(x)$ פונקציית צפיפות, $a < x < b$, $F(x)$ פונקציית ההתפלגות.

$$F(b) = 1, \quad F(a) = 0, \quad F'(x) = f(x), \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \int_a^b f(x) dx = 1$$

$F(x)$ אינה יורדת, כלומר אם: $a \leq c < d \leq b$ אז $F(c) \leq F(d)$.

$$P(X < c) = \int_a^c f(x) dx = F(c), \quad P(c < X < d) = \int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c)$$

$$E(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx, \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2, \quad E(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx,$$

התפלגות מעריכית $X \sim \exp(\lambda)$

פונקצית הצפיפות של X היא: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ כאשר $x \geq 0$.
פונקצית ההתפלגות של X היא: $F(t) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{VAR}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

התפלגות ארלנג $X \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$

פונקצית הצפיפות של X היא: $f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$

$$E(X) = \frac{k}{\lambda}, \quad \text{VAR}(X) = \frac{k}{\lambda^2}$$

הערה: נתונים $X_1, X_2, \dots, X_k$ משתנים מקריים מעריכיים בלתי תלויים כך ש- $X_i \sim \exp(\lambda)$ עבור כל $1 \leq i \leq k$ אזי $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$.

התפלגות נורמלית $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (גאוס)

X הוא משתנה נורמלי עם פרמטרים μ ו- σ , אם פונקצית הצפיפות שלו ניתנת על ידי סימונים: $E(X) = \mu$, $\text{Var}(X) = \sigma^2$.

אם $X \sim N(\mu, \sigma)$ אזי $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

פונקצית ההתפלגות של X היא: $P(X \leq t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$

כאשר $\Phi(t) = P(Z \leq t)$ היא פונקצית ההתפלגות המצטברת של המשתנה הנורמלי הסטנדרטי והיא נתונה בטבלה. תכונות של פונקצית $\Phi(t)$:

$$z_{1-\alpha} = -z_\alpha, \quad P(t_1 < Z < t_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1), \quad P(-a < Z < a) = 2\Phi(a) - 1$$

$$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t), \quad P(Z > t) = 1 - P(Z \leq t)$$

סכום והפרש התפלגויות נורמליות:

נתונים $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ משתנים מקריים בלתי תלויים, אזי מתקיים:

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

משפט הגבול המרכזי:

היו $X_1, \dots, X_n$ - משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ ושונותה σ^2 אזי:

$$S \sim N(n \cdot \mu, (\sigma \cdot \sqrt{n})^2) \quad ; \quad S = \sum X_i$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right) \quad ; \quad \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

קירוב נורמלי למשתנה בינומי:

יהי X משתנה בינומי בעל פרמטרים n ו- p

כלומר $X \sim B(n, p)$. אזי לכל t ממשי עבור n גדול (לפחות: $n > 30$) מתקיים:

$$q = p - 1 ; X \sim N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q^2})$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 + 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

רווח בר- סמך לממוצע כאשר סטיית התקן ידועה:

μ - ממוצע האוכלוסייה, σ^2 - שונות האוכלוסייה, σ - סטיית התקן של האוכלוסייה.
 $\bar{x}$ - ממוצע המדגם, α - רמת המובהקות, $1-\alpha$ רמת הביטחון, n - גודל המדגם, d - סטיית המדגם.

$$\text{רווח בר-סמך ל- } \mu : \bar{x} \pm \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$$

גודל המדגם הדרוש כדי שברמת בטחון $1-\alpha$, הסטייה בין μ לבין $\bar{X}$ (חצי אורך הרווח) לא תעלה על d הוא:

$$d = \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot \sigma}{\sqrt{n}} ; n \geq \left\{ \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \sigma}{d} \right\}^2$$

רווח בר-סמך ברמת סמך עבור פרופורציה p של "הצלחות" באוכלוסייה:

$$\hat{p} \pm \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

כאשר $\hat{p} = \frac{X}{n}$ היא פרופורציית ה"הצלחות" במדגם בגודל n .

אם ידוע בוודאות ש- $p < \hat{p} < 0.5$ או $p > \hat{p} > 0.5$ אזי

גודל המדגם המבטיח שברמת סמך $1-\alpha$ הסטייה בין p לבין $\hat{p}$ לא תעלה על $d = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ והוא:

$$n \geq \frac{z_{1-\alpha/2}^2 \hat{p}\hat{q}}{d^2}$$

אם לא שוללים את האופציה ש- p קרוב ל- 0.5 אזי מתקיים: $n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{2d}\right)^2$

דף נוסחאות מורחב עם אישור בלבד

סטטיסטיקה תיאורית

סימנים בסיסיים לשימוש :

אורך האינטרוול	l	אמצע הקבוצה	or x' MP
צפיפות האינטרוול	d	גודל המדגם	N
ממוצע	$\bar{x}$	סכום אברים	Σ
חציון	M_e	שכיחות מוחלטת	f
השכיח	M_0	שכיחות מצטברת	F
סטיית תקן	σ	שכיחות יחסית	p
שונות	σ^2	ציון תקן	z_i

n - מספר קבוצות (מחלקות)

L_i - גבול תחתון של קטע i.

R_i - גבול עליון של קטע i.

$$x'_i = (L_{in} + R_i) / 2$$

מציאת טווח:

$$R = x_n - x_1 \quad (1)$$

(קיבוץ תצפיות לפי ערכים בודדים)

$$R = R_n - L_1 \quad (2)$$

(קיבוץ נתונים לפי קטעים.)

$$p_i = \frac{f_i}{N}$$

$$d_i = \frac{f_i}{l_i},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x'_i \cdot f_i = \sum_{i=1}^n x'_i \cdot P_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum f_i \cdot (x'_i - \bar{x})^2 = \sum P_i \cdot (x'_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum f_i \cdot x_i'^2 - (\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (x'_i)^2 \cdot p_i - (\bar{x})^2$$

מציאת שכיח (קיבוץ תצפיות לפי קטעים)

$$Mo = L_i + \frac{d_i - d_{i-1}}{(d_i - d_{i-1}) + (d_i - d_{i+1})} \cdot l_i$$

i - קבוצת השכיח $(f_i \geq f_j, 1 \leq j \leq n)$

מציאת חציון (קיבוץ תצפיות לפי קטעים)

$$Me = L_i + \frac{l_i}{f_i} \times (\frac{N}{2} - F_{i-1})$$

i - קבוצת החציון $(F_{i-1} < \frac{N}{2} \text{ ו- } F_i > \frac{N}{2})$.

אם ניתן למצוא את i שעבורו $F_i = \frac{N}{2}$,

$$M_e = R_i$$

מציאת חציון (קיבוץ תצפיות לפי ערכים בודדים)

אם ניתן למצוא את i שעבורו $F_i > \frac{N}{2}$ ו- $F_{i-1} < \frac{N}{2}$.

$$M_e = x_i$$

אם ניתן למצוא את i שעבורו $F_i = \frac{N}{2}$,

$$M_e = (x_i + x_{i+1}) / 2$$

$$z_i = \frac{x'_i - \bar{x}}{\sigma}$$

אקסיומות ההסתברות

(1) תכונות כלליות של פונקציית הסתברות $P(A)$ כאשר A - מאורע כלשהו

Ω - מרחב מאורעות או אוסף כל התוצאות האפשריות של ניסוי או מאורע וודאי.

$$P(\Phi) = 0, P(\Omega) = 1, 0 \leq P(A) \leq 1$$

(2) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, כאשר $\bar{A}$ - מאורע משלים $(A \cup \bar{A} = \Omega)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (3)$$

(4) A, B מאורעות זרים אם $A \cap B = \Phi$ ומתקיים $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

נוסחאות שימושיות נוספות:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) \quad (5)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}), P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) \quad (6) \quad (\text{דה מורגן})$$

שיטת ריבוע הקסם:

מציירים ריבוע. בקצה השמאלי כותבים $A, \bar{A}$ ובקצה העליון כותבים $B, \bar{B}$, כך נקבל שתי שורות ושתי עמודות.

בקצה הימני של השורה של A כותבים $P(A)$,

בקצה הימני של השורה של $\bar{A}$ כותבים $P(\bar{A})$,

בקצה התחתון של העמודה של B כותבים $P(B)$,

בקצה התחתון של העמודה של $\bar{B}$ כותבים $P(\bar{B})$.

בפינה הימנית התחתונה כותבים 1, בארבע המשבצות באמצע כותבים את הערכים :

$$P(A \cap B) \text{ בשורה של } A \text{ ובעמודה של } B$$

$$P(\bar{A} \cap B) \text{ בשורה של } A \text{ ובעמודה של } \bar{B}$$

$$P(A \cap \bar{B}) \text{ בשורה של } \bar{A} \text{ ובעמודה של } \bar{B}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) \text{ בשורה של } \bar{A} \text{ ובעמודה של } \bar{B}$$

נשים לב שסכום שני המספרים בצד שמאל בכל שורה שווה למספר המופיע בקצה הימני של השורה. סכום שני המספרים למעלה בכל עמודה שווה למספר המופיע בקצה התחתון של כל עמודה. אם נתונים שלושה ערכים בריבוע, כך שלא כל השלושה באותה שורה או באותה העמודה, ניתן לחשב את שאר הערכים בעזרתם.

קומבינטוריקה

תמורות

$$P_n = n!; \quad P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

בחירות

	עם החזרה	בלי החזרה
סדר חשוב (חליפות)	n^k	$P_n^k = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
סדר לא חשוב (צירופים)		$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

חישוב של מספר אפשרויות למאורעות שלא יקרו נעשה על ידי הפחתת מספר האפשרויות שהמאורעות כן יקרו מכלל האפשרויות (למשל מספר האפשרויות ששני אנשים לא ישבו ביחד מחשבים על ידי הפחתה מכלל האפשרויות את מספר האפשרויות ששני האנשים כן ישבו ביחד).

חישוב של הסתברות לפעולה מסוימת מתוך כלל הפעולות מחושב על ידי חישוב מספר האפשרויות לפעולה המסוימת חלקי מספר האפשרויות עבור כלל הפעולות.

הסתברות מותנית

$P(A/B)$ - קוראים: ההסתברות המותנה של מאורע A כאשר ידוע שהמאורע B התרחש (בקיזור, ההסתברות של A בתנאי B).

$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(B)}, \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

אם A, B מאורעות זרים אז מתקיים $P(A/B) = 0$

אם A, B מאורעות בלתי תלויים אז מתקיים $P(A/B) = P(A)$, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

אם A, B מאורעות תלויים אז מתקיים $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, $P(A/B) \neq P(A)$

נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(A) = P(A/E_1) \cdot P(E_1) + \dots + P(A/E_n) \cdot P(E_n)$$

כאשר $E_1, E_2, \dots, E_n$ מאורעות זרים שאיחודם הוא כל המרחב Ω : $\sum_{i=1}^n P(E_i) = 1$

נוסחת בייז:

$$P(E_1/A) = \frac{P(A/E_1) \cdot P(E_1)}{P(A)} = \frac{P(A/E_1) \cdot P(E_1)}{P(A/E_1) \cdot P(E_1) + \dots + P(A/E_n) \cdot P(E_n)}$$

$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B) \quad \text{נוסחה נוספת:}$$

שיטת העצים:

בונים עץ כך שבהתחלה משרטטים n ענפים מסומנים ב- $E_1, E_2, \dots, E_n$ שיוצאים מנקודה מסוימת, וכותבים על כל ענף את ההסתברויות המתאימות $P(E_1), P(E_2), \dots, P(E_n)$. אחר כך, מורידים מקצה של כל אחד מהענפים ענף נוסף המסומן ב- $A|E_1, A|E_2, \dots, A|E_n$ בהתאמה, וכותבים על כל אחד מהענפים החדשים את ההסתברויות $P(A|E_1), P(A|E_2), \dots, P(A|E_n)$. כעת, כדי לחשב $P(A)$, מכפילים כל אחד מהערכים $P(A|E_1), P(A|E_2), \dots, P(A|E_n)$ בערכים $P(E_1), P(E_2), \dots, P(E_n)$ שמעליו, ומחברים את הערכים מהענפים השונים שהתקבלו.

מומנטים למשתנה בדיד

$$E(x) = \sum x_i P(x_i), \quad \text{שונות} \quad \text{תוחלת} \quad \text{שונות} \quad \text{תוחלת של תוחלת ושונות:}$$

$$E(b \cdot X + a) = b \cdot E(X) + a, \quad \text{Var}(b \cdot X + a) = b^2 \cdot \text{Var}(X), \quad E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

התפלגות בינומית (ברנולי) $X \sim B(n, p)$

n - מספר ניסויים, p - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, $q = 1 - p$: נסמן

הסתברות שמתוך n ניסויים יהיו בדיוק k הצלחות: $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

תוחלת ושונות של התפלגות בינומית: $E(X) = np$, $\text{VAR}(X) = npq$

"הצלחה בניסוי" היא הפעולה ש- X מודד, ללא קשר למשמעות שלו כדבר טוב (למשל אם רוצים לחשב הסתברות לבחור k מוצרים פגומים מתוך n מוצרים עם החזרה, אזי "הצלחה בניסוי" הוא לבחור מוצר פגום).

התפלגות היפרגיאומטרית

באוכלוסיה N פריטים, מתוכם D פריטים מיוחדים. מוציאים מהאוכלוסיה n פריטים **ללא החזרה**. X = מספר פריטים מיוחדים שהוצאו.

ההסתברות שמתוך n פריטים יהיו k פריטים מיוחדים: $P(X = k) = \frac{C_D^k \cdot C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$

תוחלת ושונות:

$$E(X) = n \cdot \frac{D}{N} \quad \text{VAR}(X) = n \cdot \frac{D}{N} \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

התפלגות גיאומטרית (עד הצלחה ראשונה) $X \sim G(p)$

p - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, נסמן: $q = 1 - p$

ההסתברות שההצלחה הראשונה תתרחש בניסוי מס' k : $P(X = k) = q^{k-1} \cdot p$

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad \text{VAR}(X) = \frac{1-p}{p^2}, \quad P(X > k) = q^k, \quad P(X \leq k) = 1 - q^k$$

$$S = a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q} \quad (q < 1) \quad \text{סכום של סדרה הנדסית אינסופית}$$

התפלגות פואסון

התפלגות פואסון עם פרמטר λ : $X \sim P(\lambda)$

λ הוא המספר הממוצע של האירועים ליחידת זמן, $\lambda > 0$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \quad \text{ההסתברות שביחידת הזמן יתרחשו בדיוק } k \text{ אירועים היא}$$

$$\text{VAR}(X) = \lambda, \quad E(X) = \lambda \quad \text{תוחלת ושונות}$$

קירוב פואסון לבינומית (עבור n גדול ו p קטן) מציבים $\lambda = np$

בהתפלגות פואסון חשוב להשתמש בממוצע ליחידת הזמן שרוצים לחשב, ואם בנתון המקורי של הממוצע הוא ליחידת זמן אחר, צריכים לחשב את הממוצע ליחידת הזמן שהתבקשנו בשאלה של חישוב ההסתברות (למשל, אם התבקשנו לחשב את ההסתברות שאירוע מסוים יתרחש מספר פעמים בשעה, ונתון שהאירוע מתרחש מספר פעמים בממוצע בדקה, צריך לחשב λ שיהיה מספר הפעמים שהאירוע יתרחש מספר הפעמים בממוצע בשעה).

משתנה מקרי רציף

$f(x)$ פונקציית צפיפות, $a < x < b$, $F(x)$ פונקציית ההתפלגות.

$$F(b) = 1, \quad F(a) = 0, \quad F'(x) = f(x), \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \int_a^b f(x) dx = 1$$

$F(x)$ אינה יורדת, כלומר אם: $a \leq c < d \leq b$ אז $F(c) \leq F(d)$.

$$P(X < c) = \int_a^c f(x) dx = F(c), \quad P(c < X < d) = \int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c)$$

$$E(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx, \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2, \quad E(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx,$$

התפלגות נורמלית (גאוס) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

X הוא משתנה נורמלי עם פרמטרים μ ו- σ , אם פונקציית הצפיפות שלו ניתנת על ידי

$$\text{סימונים: } E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2$$

$$\text{אם } X \sim N(\mu, \sigma) \text{ אזי } Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\text{פונקציית התפלגות של } X \text{ היא: } P(X \leq t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$$

כאשר $\Phi(t) = P(Z \leq t)$ היא פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה הנורמלי הסטנדרטי

והיא נתונה בטבלה. תכונות של פונקציית $\Phi(t)$:

$$P(-a < Z < a) = 2\Phi(a) - 1, \quad P(t_1 < Z < t_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1), \quad z_{1-\alpha} = -z_\alpha$$

$$P(Z > t) = 1 - P(Z \leq t), \quad \Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$$

משפט הגבול המרכזי

יהיו $X_1, \dots, X_n$ - משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ ושונותה σ^2 אזי

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq t\right) = \Phi\left(\frac{t - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \quad \text{או} \quad \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\cdot\mu, n\cdot\sigma^2)$$

$$P\left(\bar{X} \leq t\right) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \quad \text{או} \quad \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

קירוב נורמלי למשתנה בינומי

יהי X משתנה בינומי בעל פרמטרים n ו- p כלומר $X \sim B(n, p)$, אזי עבור n מספיק גדול ($n > 30$) מתקיים:

$$X \sim N(np, np(1-p)); P(X \leq k) = \Phi\left(\frac{k + 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

סכום והפרש התפלגויות נורמליות

יהיו X ו- Y משתנים מקריים נורמליים בלתי תלויים כך ש: $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2); Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

אזי מתקיים: $X \pm Y \sim N(\mu_x \pm \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_x - \mu_y, \frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}\right); P(\bar{X} - \bar{Y} \leq t) = \Phi\left(\frac{t - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}}\right)$$

רווח בר-סמך לממוצע כאשר סטיית התקן ידועה:

μ - ממוצע האוכלוסייה, σ^2 - שונות האוכלוסייה, σ - סטיית התקן של האוכלוסייה.

$\bar{x}$ - ממוצע המדגם, α - רמת המובהקות, $1-\alpha$ רמת הביטחון, n - גודל המדגם

$$\bar{x} - \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}; \quad \Phi(z_{1-\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad : \mu \text{ - רווח בר-סמך ל-}$$

גודל המדגם הדרוש כדי שברמת בטחון $1-\alpha$, הסטייה בין μ לבין $\bar{X}$ לא תעלה על $d = \frac{z_{1-\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}}$ הוא:

$$n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \sigma}{d}\right)^2$$

רווח בר-סמך עבור פרופורציה

$$\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} : p \text{ - רווח בר-סמך עבור פרופורציה}$$

כאשר $\hat{p} = \frac{x}{n}$ היא פרופורציית ה"הצלחות" במדגם בגודל n

אם ידוע בוודאות ש- $p < \hat{p} < 0.5$ או $p > \hat{p} > 0.5$ אזי

גודל המדגם המבטיח שברמת סמך $1-\alpha$ הסטייה בין p לבין $\hat{p}$ לא תעלה על $d = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

והוא : $n \geq \frac{z_{1-\alpha/2}^2 \cdot \hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{d^2}$. כאשר $\hat{p}$ הוא הערך הקרוב ביותר ל- 0.5 שיכול להתקבל.

אם לא שוללים את האופציה ש- p קרוב ל- 0.5 אזי מתקיים : $n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{2d} \right)^2$

אינטגרציה וגזירה בחלקים:

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

$$[u(x)/v(x)]' = [u'(x)v(x) - v'(x)u(x)]/v^2(x)$$

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int v'(x)u(x)dx$$