

אוניברסיטת אריאל בשומרון

מבחן בנושא: סטטיסטיקה והסתברות

ד"ר אפרים שמרלינג מס' קורס: 2-4621110-3 2-4621110-1

סמסטר א', מועד א', תשע"ז, 28.06.2023.

מתרגלים: דביר רוס, יצחק מושקוביץ, צחי שביט, אחיה דוידוביץ

זמן הבחינה: 150 דקות
מותר להשתמש במחשבון
נא לכתוב בכתב ברור.

שאלה 1

ההסתברות שרכבת לא תצא בזמן וגם לא תגיע בזמן היא 0.01. ההסתברות שרכבת לא תצא בזמן אך תגיע בזמן היא 0.02. מה ההסתברות שהרכבת גם תצא וגם תגיע בזמן?
א. ידוע שהרכבת יצאה בזמן מה ההסתברות שהיא לא תגיע בזמן?
ב. מה ההסתברות שבמשך 10 נסיעות הרכבת תגיע בזמן לפחות 9 פעמים?
ד. למה שווה ההסתברות שבמשך 10 נסיעות הרכבת תצא בזמן בכל הימים ולא תגיע בזמן בדיוק פעמיים?

שאלה 2

במסיבה משתתפים 100 איש, באוכלוסייה הכללית מקובל כי כל משתתף במסיבה כלשהי שותה בממוצע μ ליטרים, עם סטיית תקן של σ ליטרים. אם חבית שתייה מכיל 52.6 ליטרים, ההסתברות שהשתייה בחבית תספיק ל-100 המשתתפים שווה ל-0.8. אם חבית שתייה מכיל 59.2 ליטרים, ההסתברות שהשתייה בחבית תספיק לכל המשתתפים שווה ל-0.9. כמה ליטרים צריכה להכיל חבית השתייה כדי לספק את צרכי המוזמנים בהסתברות של 0.99?

שאלה 3

פונקציית צפיפות של משתנה מקי X היא

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-2x}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & x < -1 \end{cases}$$

(א) מצא/י את הפרמטר a

(ב) מצא/י את התוחלת ואת השונות של X .

שאלה 4

בבית משפט ישנם 3 שופטים, שקובעים אם הנאשם הוא פושע/חף מפשע.
כל שופט קובע באופן עצמאי האם נאשם הוא פושע, ופסק דין של בית המשפט מתקבל לפי דעת רוב השופטים.
כל שופט קובע שנאשם שהוא פושע חף מפשע בהסתברות 0.1.
אם הנאשם הוא חף מפשע, כל שופט קובע כי הוא חף מפשע ללא יוצא מהכלל.
ידוע כי 30% מהנאשמים שמגיעים לבית משפט הם פושעים.
הגיע נאשם לבית משפט וקיבל פסק דין חף מפשע, מה ההסתברות שהוא פושע?

שאלה 5

ישנו מחשק שמתנהל כך:
ישנם 5 דלתות, שמאחורי 3 מהם מופיע פרס זהה ומאחורי 2 דלתות מקום ריק (נראה את הדלתות האלו "דלתות ריקות")
אם השחקן הצביע על דלת עם הפרס, מארגן המשחק שמכיר מה המצב מאחורי כל דלת, פותח את האחת מהדלתות הריקות.
אם השחקן בחר דלת ריקה, מארגן המשחק פותח את הדלת הריקה השנייה.
לאחר הפתיחה, המארגן נותן לשחקן אפשרות להצביע על דלת אחרת, מאשר הדלת שהצביע עליה קודם.
א. מה ההסתברות לשחקן לנצח, אם הוא לא משנה את הבחירה המקורית שלו, לאחר הפתיחה של המארגן?
ב. מה ההסתברות לשחקן לנצח, אם הוא כן משנה את הבחירה המקורית שלו, לאחר הפתיחה של המארגן?

שאלה 6

בחדר לימוד ישנם 36 כסאות, שמסודרים ב9 שורות (בכל שורה 4 כסאות).
נכנסים לכיתה 6 סטודנטים, ומתיישבים בכיסאות באקראי.
א. מה ההסתברות שבאף שורה, לא ישבו 4 סטודנטים?
ב. למה שווה ההסתברות שבאחת מהשורות ישבו בדיוק שלושה סטודנטים ובאחת מהשורות האחרות ישבו בדיוק שני סטודנטים?

בהצלחה!!!

טבלת התפלגות נורמלית סטנדרטית

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.99903240	0.99906456	0.99909574	0.99912597	0.99915526	0.99918365	0.99921115	0.99923781	0.99926362	0.99928864
3.2	0.99931286	0.99933633	0.99935905	0.99938105	0.99940235	0.99942297	0.99944294	0.99946226	0.99948096	0.99949906
3.3	0.99951658	0.99953352	0.99954991	0.99956577	0.99958111	0.99959594	0.99961029	0.99962416	0.99963757	0.99965054
3.4	0.99966307	0.99967519	0.99968689	0.99969821	0.99970914	0.99971971	0.99972991	0.99973977	0.99974929	0.99975849
3.5	0.99976737	0.99977595	0.99978423	0.99979222	0.99979994	0.99980738	0.99981457	0.99982151	0.99982820	0.99983466
3.6	0.99984089	0.99984690	0.99985270	0.99985829	0.99986368	0.99986888	0.99987389	0.99987872	0.99988338	0.99988787
3.7	0.99989220	0.99989637	0.99990039	0.99990426	0.99990799	0.99991158	0.99991504	0.99991838	0.99992159	0.99992468
3.8	0.99992765	0.99993052	0.99993327	0.99993593	0.99993848	0.99994094	0.99994331	0.99994558	0.99994777	0.99994988
3.9	0.99995190	0.99995385	0.99995573	0.99995753	0.99995926	0.99996092	0.99996253	0.99996406	0.99996554	0.99996696
4	0.99996833	0.99996964	0.99997090	0.99997211	0.99997327	0.99997439	0.99997546	0.99997649	0.99997748	0.99997843
4.1	0.99997934	0.99998022	0.99998106	0.99998186	0.99998263	0.99998338	0.99998409	0.99998477	0.99998542	0.99998605
4.2	0.99998665	0.99998723	0.99998778	0.99998832	0.99998882	0.99998931	0.99998978	0.99999023	0.99999066	0.99999107
4.3	0.99999146	0.99999184	0.99999220	0.99999254	0.99999288	0.99999319	0.99999350	0.99999379	0.99999407	0.99999433
4.4	0.99999459	0.99999483	0.99999506	0.99999529	0.99999550	0.99999571	0.99999590	0.99999609	0.99999627	0.99999644
4.5	0.99999660	0.99999676	0.99999691	0.99999705	0.99999719	0.99999732	0.99999744	0.99999756	0.99999768	0.99999778
4.6	0.99999789	0.99999799	0.99999808	0.99999817	0.99999826	0.99999834	0.99999842	0.99999849	0.99999857	0.99999863
4.7	0.99999870	0.99999876	0.99999882	0.99999888	0.99999893	0.99999898	0.99999903	0.99999908	0.99999912	0.99999917
4.8	0.99999921	0.99999925	0.99999928	0.99999932	0.99999935	0.99999938	0.99999941	0.99999944	0.99999947	0.99999950
4.9	0.99999952	0.99999954	0.99999957	0.99999959	0.99999961	0.99999963	0.99999965	0.99999967	0.99999968	0.99999970
5	0.99999971	0.99999973	0.99999974	0.99999975	0.99999977	0.99999978	0.99999979	0.99999980	0.99999981	0.99999982

סטטיסטיקה תיאורית

סימנים בסיסיים לשימוש :

אורך האינטרוול	l	א. אמצע הקבוצה	$x' \text{ or } MP$
צפיפות האינטרוול	d	ב. גודל המדגם	N
ממוצע	$\bar{x}$	סכום אברים	Σ
חציון	M_e	שכיחות מוחלטת	f
השכיח	M_0	ג. שכיח ות מצטברת	F
סטיית תקן	σ	שכיחות יחסית	p
שונות	σ^2	ציון תקן	z_i

n - מספר קבוצות (מחלקות)

L_i - גבול תחתון של קטע i.

R_i - גבול עליון של קטע i.

$$x'_i = (L_{in} + R_i) / 2$$

מציאת טווח:

$$R = x_n - x_1 \quad (1)$$

(קיבוץ תצפיות לפי ערכים בודדים)

$$R = R_n - L_1 \quad (2)$$

(קיבוץ נתונים לפי קטעים).

$$p_i = \frac{f_i}{N}$$

$$d_i = \frac{f_i}{l_i},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x'_i \cdot f_i = \sum_{i=1}^n x'_i \cdot P_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum f_i \cdot (x'_i - \bar{x})^2 = \sum P_i \cdot (x'_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum f_i \cdot x_i'^2 - (\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (x_i')^2 \cdot p_i - (\bar{x})^2$$

מציאת שכיח (קיבוץ תצפיות לפי קטעים)

$$Mo = L_i + \frac{d_i - d_{i-1}}{(d_i - d_{i-1}) + (d_i - d_{i+1})} \cdot l_i$$

i - קבוצת השכיח $(f_i \geq f_j, 1 \leq j \leq n)$

מציאת הציון (קיבוץ תצפיות לפי קטעים)

$$Me = L_i + \frac{l_i}{f_i} \times \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right)$$

i - קבוצת החציון $(F_{i-1} < \frac{N}{2} \text{ ו- } F_i > \frac{N}{2})$.

אם ניתן למצוא את i שעבורו $F_i = \frac{N}{2}$,

$$M_e = R_i$$

מציאת הציון (קיבוץ תצפיות לפי ערכים בודדים)

אם ניתן למצוא את i שעבורו $F_{i-1} < \frac{N}{2} \text{ ו- } F_i > \frac{N}{2}$.

$$M_e = x_i$$

אם ניתן למצוא את i שעבורו $F_i = \frac{N}{2}$,

$$M_e = (x_i + x_{i+1}) / 2$$

$$z_i = \frac{x'_i - \bar{x}}{\sigma}$$

$$M_k(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x'_i)^k f_i = \sum (x'_i)^k P_i$$

$$\bar{X} = M_1(X)$$

$$\sigma^2 = M_2(X) - (M_1(X))^2$$

באיחוד של t קבוצות $X_1, X_2, \dots, X_t$ בגודל $n_1, n_2, \dots, n_t$ המומנט M_k של איחוד הקבוצות X הוא סכום משוקלל המומנטים ה- k ים.

$$M_k(X) = \sum_{i=1}^t \frac{n_i}{n} M_k(X_i)$$

אקסיומות ההסתברות

(1) תכונות כלליות של פונקציית ההסתברות $P(A)$ כאשר A - מאורע כלשהו

Ω - מרחב מאורעות או אוסף כל התוצאות האפשריות של ניסוי או מאורע וודאי.

$$P(\Phi) = 0, \quad P(\Omega) = 1, \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad , \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \text{כאשר } \bar{A} \text{ - מאורע משלים } (A \cup \bar{A} = \Omega)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (3)$$

A, B מאורעות זרים אם $A \cap B = \Phi$ ומתקיים $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

נוסחאות שימושיות נוספות:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) \quad (5)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) \quad , P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) \quad (6) \quad (\text{דה מורגן})$$

קומבינטוריקה

תמורות

$$P_n = n!; \quad P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

בחירות

	עם החזרה	בלי החזרה
סדר חשוב (חליפות)	n^k	$P_n^k = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
סדר לא חשוב (צירופים)		$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

הסתברות מותנית

$P(A/B)$ - קוראים: ההסתברות המותנה של מאורע A כאשר ידוע שהמאורע B

התרחש (בקיצור, ההסתברות של A בתנאי B).

$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(B)} \quad , \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

אם A, B מאורעות זרים אז מתקיים $P(A/B) = 0$

אם A, B מאורעות בלתי תלויים אז מתקיים $P(A/B) = P(A)$, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

אם A, B מאורעות תלויים אז מתקיים $P(A/B) \neq P(A)$, $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(A) = P(A/E_1) \cdot P(E_1) + \dots + P(A/E_n) \cdot P(E_n)$$

כאשר $E_1, E_2, \dots, E_n$ מאורעות זרים שאיחודם הוא כל המרחב Ω : $\sum_{i=1}^n P(E_i) = 1$

נוסחת ביז :

$$P(E_1 / A) = \frac{P(A / E_1) \cdot P(E_1)}{P(A)} = \frac{P(A / E_1) \cdot P(E_1)}{P(A / E_1) \cdot P(E_1) + \dots + P(A / E_n) \cdot P(E_n)}$$

נוסחה נוספת: $P(\bar{A} / B) = 1 - P(A / B)$

מומנטים למשתנה בדיד

תוחלת $E(x) = \sum x_i P(x_i)$, שונות $Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2$
תכונות של תוחלת ושונות:

$$E(b \cdot X + a) = b \cdot E(X) + a, \quad Var(b \cdot X + a) = b^2 \cdot Var(X), \quad E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

נוסחת התוחלת השלמה

נתונים קבוצה של מאורעות זרים $\{A_1, \dots, A_n\}$ משתנה מקרי כלשהו אזי:
 $E(X) = E(X | A_1) \cdot P(A_1) + E(X | A_2) \cdot P(A_2) + \dots + E(X | A_n) \cdot P(A_n)$

התפלגות בינומית (ברנולי) $X \sim B(n, p)$

n - מספר ניסויים, p - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, nsמן: $q = 1 - p$.
ההסתברות שמתוך n ניסויים יהיו בדיוק k הצלחות: $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$
תוחלת ושונות של התפלגות בינומית: $E(X) = np$, $VAR(X) = npq$

התפלגות גיאומטרית (עד הצלחה ראשונה) $X \sim G(p)$

p - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, nsמן: $q = 1 - p$.
ההסתברות שההצלחה הראשונה תתרחש בניסוי מס' k: $P(X = k) = q^{k-1} \cdot p$
 $E(X) = \frac{1}{p}$, $VAR(X) = \frac{1-p}{p^2}$, $P(X > k) = q^k$, $P(X \leq k) = 1 - q^k$

סכום של סדרה הנדסית אינסופית: $S = a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q}$ ($q < 1$)

התפלגות בינומית שלילית (מספר ניסיונות עד הצלחה מספר r) $X \sim NB(r, p)$

p - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, nsמן: $q = 1 - p$.
ההסתברות לכך שההצלחה מספר r יבוא בניסוי מס' k: $P(X = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}$
 $E(X) = \frac{r}{p}$, $VAR(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

הערה: התפלגות הגיאומטרית הוא מקרה פרטי של התפלגות בינומית שלילית, עם $r = 1$.
נתונים $X_1, X_2, \dots, X_r$ משתנים מקריים גיאומטריים בלתי תלויים כך ש- $X_i \sim G(p)$ עבור כל $1 \leq i \leq r$, אזי $\sum_{i=1}^r X_i \sim NB(r, p)$.

התפלגות היפרגאומטרית

באוכלוסייה N פריטים, מתוכם D פריטים מיוחדים. מוציאים מהאוכלוסייה n פריטים ללא החזרה. X = מספר פריטים מיוחדים שהוצאו.

ההסתברות שמתוך n פריטים יהיו k אפריטים מיוחדים: $P(X = k) = \frac{C_D^k \cdot C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$

תוחלת ושונות:

$$E(X) = n \cdot \frac{D}{N} \quad \text{VAR}(X) = n \cdot \frac{D}{N} \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

התפלגות פואסון

התפלגות פואסון עם פרמטר λ : $X \sim P(\lambda)$

λ הוא המספר הממוצע של האירועים ליחידת זמן, $\lambda > 0$

ההסתברות שביחידת הזמן יתרחשו בדיוק k אירועים היא: $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$

תוחלת ושונות: $VAR(X) = \lambda$, $E(X) = \lambda$

קירוב פואסון לבינומית (עבור n גדול ו p קטן) מציבים $\lambda = np$

משתנה מקרי רציף

$f(x)$ פונקציית צפיפות, $a < x < b$, $F(x)$ פונקציית ההתפלגות.

$$F(b) = 1, F(a) = 0, F'(x) = f(x), F(x) = \int_a^x f(t) dt, \int_a^b f(x) dx = 1$$

$F(x)$ אינה יורדת, כלומר אם: $a \leq c < d \leq b$ אז $F(c) \leq F(d)$.

$$P(X < c) = \int_a^c f(x) dx = F(c), P(c < X < d) = \int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c)$$

$$E(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx, Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2, E(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx,$$

התפלגות נורמלית (גאוס) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

X הוא משתנה נורמלי עם פרמטרים μ ו- σ , אם פונקציית הצפיפות שלו ניתנת על ידי

$$Var(X) = \sigma^2, E(X) = \mu$$

אם $X \sim N(\mu, \sigma)$ אזי $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

פונקציית ההתפלגות של X היא: $P(X \leq t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$

כאשר $\Phi(t) = P(Z \leq t)$ היא פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה הנורמלי הסטנדרטי

והיא נתונה בטבלה. תכונות של פונקציית $\Phi(t)$:

$$z_{1-\alpha} = -z_\alpha, P(t_1 < z < t_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1), P(-a < Z < a) = 2\Phi(a) - 1$$

$$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t), P(Z > t) = 1 - P(Z \leq t)$$

סכום והפרש התפלגויות נורמליות:

נתונים $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ משתנים מקריים בלתי תלויים, אזי מתקיים: $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

$$X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

משפט הגבול המרכזי:

היו $X_1, \dots, X_n$ - משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ ושונותה σ^2 אזי:

$$S = \sum X_i ; S \sim N(n \cdot \mu, (\sigma \cdot \sqrt{n})^2)$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} ; \bar{X} \sim N\left(\mu, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right);$$

קירוב נורמלי למשתנה בינומי:

יהי X משתנה בינומי בעל פרמטרים n ו- p
 כלומר $X \sim B(n, p)$. אזי לכל t ממשי עבור n גדול (לפחות: $n > 30$) מתקיים:

$$q = p - 1 ; X \sim N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q}^2)$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 + 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

רווח בר-סמך לממוצע כאשר סטיית התקן ידועה:

μ - ממוצע האוכלוסייה, σ^2 - שונות האוכלוסייה, σ - סטיית התקן של האוכלוסייה.
 $\bar{x}$ - ממוצע המדגם, $1 - \alpha$ - רמת המובהקות, $1 - \alpha$ רמת הביטחון, n - גודל המדגם, d - סטיית המדגם.

$$\text{רווח בר-סמך-}\mu : \bar{x} \pm \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$$

גודל המדגם הדרוש כדי שברמת בטחון $1 - \alpha$, הסטייה בין μ לבין $\bar{X}$ (חצי אורך הרווח) לא תעלה על d הוא:

$$n \geq \left\lceil \frac{\left(\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \sigma\right)^2}{d^2} \right\rceil ; d = \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$$

רווח בר-סמך ברמת סמך עבור פרופורציה p של "הצלחות" באוכלוסייה:

$$\hat{p} \pm \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

כאשר $\hat{p} = \frac{X}{n}$ היא פרופורציית ה"הצלחות" במדגם בגודל n .

אם ידוע בוודאות ש- $p < \hat{p} < 0.5$ או $p > \hat{p} > 0.5$ אזי

גודל המדגם המבטיח שברמת סמך $1-\alpha$ הסטייה בין p לבין $\hat{p}$ לא תעלה על $d = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

והוא: $n \geq \frac{z_{1-\alpha/2}^2 \hat{p}\hat{q}}{d^2}$.

אם לא שוללים את האופציה ש- p קרוב ל- 0.5 אזי מתקיים: $n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{2d} \right)^2$

אינטגרציה וגזירה בחלקים:

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

$$[u(x)/v(x)]' = [u'(x)v(x) - v'(x)u(x)]/v^2(x)$$

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int v'(x)u(x)dx$$

דף נוסחאות מורחב

אקסיומות ההסתברות

- (1) תכונות כלליות של פונקציית ההסתברות $P(A)$ כאשר A - מאורע כלשהו
 Ω - מרחב מאורעות או אוסף כל התוצאות האפשריות של ניסוי או מאורע וודאי.
 $P(\Phi) = 0, P(\Omega) = 1, 0 \leq P(A) \leq 1$
- (2) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, כאשר $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ - מאורע משלים $(A \cup \bar{A} = \Omega)$
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (3)
- (4) A, B מאורעות זרים אם $A \cap B = \Phi$ ומתקיים $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
נוסחאות שימושיות נוספות:
 $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ (5)
 $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$, $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B})$ (6) (דה מורגן)

שיטת ריבוע הקסם:

מציירים ריבוע. בקצה השמאלי כותבים $A, \bar{A}$ ובקצה העליון כותבים $B, \bar{B}$, כך נקבל שתי שורות ושתי עמודות.
 בקצה הימני של השורה של A כותבים $P(A)$,
 בקצה הימני של השורה של $\bar{A}$ כותבים $P(\bar{A})$,
 בקצה התחתון של העמודה של B כותבים $P(B)$,
 בקצה התחתון של העמודה של $\bar{B}$ כותבים $P(\bar{B})$,
 בפינה הימנית התחתונה כותבים 1,
 בארבע המשבצות באמצע כותבים את הערכים:

$$P(A \cap B) \text{ בשורה של } A \text{ ובעמודה של } B$$

$$P(\bar{A} \cap B) \text{ בשורה של } A \text{ ובעמודה של } \bar{B}$$

$$P(A \cap \bar{B}) \text{ בשורה של } \bar{A} \text{ ובעמודה של } B$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) \text{ בשורה של } \bar{A} \text{ ובעמודה של } \bar{B}$$

נשים לב שסכום שני המספרים בצד שמאל בכל שורה שווה למספר המופיע בקצה הימני של השורה. סכום שני המספרים למעלה בכל עמודה שווה למספר המופיע בקצה התחתון של כל עמודה.
 אם נתונים שלושה ערכים בריבוע, כך שלא כל השלושה באותה שורה או באותה העמודה, ניתן לחשב את שאר הערכים בעזרתם.

קומבינטוריקה

תמורות

$$P_n = n!; \quad P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

בחירות

	עם החזרה	בלי החזרה
סדר חשוב (חליפות)	n^k	$P_n^k = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
סדר לא חשוב (צירופים)		$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

חישוב של מספר אפשרויות למאורעות שלא יקרו נעשה על ידי הפחתת מספר האפשרויות שהמאורעות כן יקרו מכלל האפשרויות (למשל מספר האפשרויות ששני אנשים לא ישבו ביחד מחשבים על ידי הפחתה מכלל האפשרויות את מספר האפשרויות ששני האנשים כן ישבו ביחד).

חישוב של הסתברות לפעולה מסוימת מתוך כלל הפעולות מחושב על ידי חישוב מספר האפשרויות לפעולה המסוימת חלקי מספר האפשרויות עבור כלל הפעולות.

הסתברות מותנית

$P(A/B)$ - קוראים: ההסתברות המותנה של מאורע A כאשר ידוע שהמאורע B

התרחש (בקיצור, ההסתברות של A בתנאי B).

$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(B)}, \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

אם A, B מאורעות זרים אז מתקיים $P(A/B) = 0$

אם A, B מאורעות בלתי תלויים אז מתקיים $P(A/B) = P(A)$, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

אם A, B מאורעות תלויים אז מתקיים $P(A/B) \neq P(A)$, $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(A) = P(A/E_1) \cdot P(E_1) + \dots + P(A/E_n) \cdot P(E_n)$$

כאשר $E_1, E_2, \dots, E_n$ מאורעות זרים שאיחודם הוא כל המרחב Ω : $\sum_{i=1}^n P(E_i) = 1$

נוסחת בייז:

$$P(E_1/A) = \frac{P(A/E_1) \cdot P(E_1)}{P(A)} = \frac{P(A/E_1) \cdot P(E_1)}{P(A/E_1) \cdot P(E_1) + \dots + P(A/E_n) \cdot P(E_n)}$$

$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B): \text{נוסחה נוספת:}$$

שיטת העצים:

בונים עץ כך שבהתחלה משרטטים n ענפים מסומנים ב- $E_1, E_2, \dots, E_n$ שיוצאים מנקודה מסוימת, וכותבים על כל

ענף את ההסתברויות המתאימות $P(E_1), P(E_2), \dots, P(E_n)$. אחר כך, מורידים מקצה של כל אחד מהענפים ענף

נוסף המסומן ב- $A|E_1, A|E_2, \dots, A|E_n$ בהתאמה, וכותבים על כל אחד מהענפים החדשים את ההסתברויות

$P(A|E_1), P(A|E_2), \dots, P(A|E_n)$. כעת, כדי לחשב $P(A)$, מכפילים כל אחד מהערכים

$P(E_1), P(E_2), \dots, P(E_n)$ בערכים $P(A|E_1), P(A|E_2), \dots, P(A|E_n)$ שמעליו, ומחברים את הערכים

מהענפים השונים שהתקבלו.

מומנטים למשתנה בדיד

$$E(x) = \sum x_i P(x_i), \quad \text{שונות } \text{Var}(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

תכונות של תוחלת ושונות:

$$E(b \cdot X + a) = b \cdot E(X) + a, \quad \text{Var}(b \cdot X + a) = b^2 \cdot \text{Var}(X), \quad E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

נוסחת התוחלת השלמה

נתונים קבוצה שלמה של מאורעות זרים $\{A_1, \dots, A_n\}$. X משתנה מקרי כלשהו אזי:

$$E(X) = E(X|A_1) \cdot P(A_1) + E(X|A_2) \cdot P(A_2) + \dots + E(X|A_n) \cdot P(A_n)$$

התפלגות בינומית (ברנולי) $X \sim B(n, p)$

n - מספר ניסויים, p - הסתברות הצלחה בכל ניסוי בודד, נסמן: $q = 1 - p$.

ההסתברות שמתוך n ניסויים יהיו בדיוק k הצלחות: $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$
תוחלת ושונות של התפלגות בינומית: $E(X) = np$, $VAR(X) = npq$

"הצלחה בניסוי" היא הפעולה ש- X מודד, ללא קשר למשמעות שלו כדבר טוב (למשל אם רוצים לחשב הסתברות לבחור k מוצרים פגומים מתוך n מוצרים עם החזרה, אזי "הצלחה בניסוי" הוא לבחור מוצר פגום).

התפלגות היפרגיאומטרית

באוכלוסייה N פריטים, מתוכם D פריטים מיוחדים. מוציאים מהאוכלוסייה n פריטים ללא החזרה. X = מספר פריטים מיוחדים שהוצאו.

ההסתברות שמתוך n פריטים יהיו k אפריטים מיוחדים: $P(X = k) = \frac{C_D^k \cdot C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$

תוחלת ושונות:

$$E(X) = n \cdot \frac{D}{N} \quad VAR(X) = n \cdot \frac{D}{N} \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

התפלגות גיאומטרית (עד הצלחה ראשונה) $X \sim G(p)$

p - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, $q = 1 - p$: נסמן

ההסתברות שההצלחה הראשונה תתרחש בניסוי מס' k : $P(X = k) = q^{k-1} \cdot p$

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad VAR(X) = \frac{1-p}{p^2}, \quad P(X > k) = q^k, \quad P(X \leq k) = 1 - q^k$$

סכום של סדרה הנדסית אינסופית: $S = a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q} \quad (q < 1)$

התפלגות בינומית שלילית (מספר ניסיונות עד הצלחה מספר r) $X \sim NB(r, p)$

p - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, $q = 1 - p$: נסמן

ההסתברות לכך שההצלחה מספר r יבוא בניסוי מס' k : $P(X = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}$

$$E(X) = \frac{r}{p}, \quad VAR(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

הערה: התפלגות הגיאומטרית הוא מקרה פרטי של התפלגות בינומית שלילית, עם $r = 1$.

נתונים $X_1, X_2, \dots, X_r$ משתנים מקריים גיאומטריים בלתי תלויים כך ש- $X_i \sim G(p)$ עבור כל $1 \leq i \leq r$ אזי $\sum_{i=1}^r X_i \sim NB(r, p)$.

התפלגות פואסון

התפלגות פואסון עם פרמטר λ : $X \sim P(\lambda)$

λ הוא המספר הממוצע של האירועים ליחידת זמן, $\lambda > 0$

ההסתברות שביחידת הזמן יתרחשו בדיוק k אירועים היא: $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$

תוחלת ושונות: $E(X) = \lambda$, $VAR(X) = \lambda$

קירוב פואסון לבינומית (עבור n גדול ו p קטן) מציבים $\lambda = np$

בהתפלגות פואסון חשוב להשתמש בממוצע ליחידת הזמן שרוצים לחשב, ואם בנתון המקורי של הממוצע הוא ליחידת זמן אחר, צריכים לחשב את הממוצע ליחידת הזמן שהתבקשנו בשאלה של חישוב ההסתברות (למשל, אם התבקשנו לחשב את ההסתברות שאירוע מסוים יתרחש מספר פעמים בשעה, ונתון שהאירוע מתרחש מספר פעמים בממוצע בדקה, צריך לחשב λ שיהיה מספר הפעמים שהאירוע יתרחש מספר הפעמים בממוצע בשעה).

משתנה מקרי רציף

$f(x)$ פונקציית צפיפות, $a < x < b$, $F(x)$ פונקציית ההתפלגות.

$$F(b)=1, F(a)=0, F'(x)=f(x), F(x)=\int_a^x f(t)dt, \int_a^b f(x)dx=1$$

$$F(c) \leq F(d) \text{ או } a \leq c < d \leq b: \text{ כלומר אם: } F(x) \text{ אינה יורדת,}$$

$$P(X < c) = \int_a^c f(x)dx = F(c), P(c < X < d) = \int_c^d f(x)dx = F(d) - F(c)$$

$$E(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx, \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2, E(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx,$$

התפלגות נורמלית (גאוס) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

X הוא משתנה נורמלי עם פרמטרים μ ו- σ , אם פונקציית הצפיפות שלו ניתנת על ידי סימונים: $E(X) = \mu, \text{Var}(X) = \sigma^2$.

$$\text{אם } X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ אזי } Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\text{פונקציית התפלגות של } X \text{ היא: } P(X \leq t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$$

כאשר $\Phi(t) = P(Z \leq t)$ היא פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה הנורמלי הסטנדרטי והיא נתונה בטבלה. תכונות של פונקציית $\Phi(t)$:

$$z_{1-\alpha} = -z_\alpha, P(t_1 < Z < t_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1), P(-a < Z < a) = 2\Phi(a) - 1$$

$$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t), P(Z > t) = 1 - P(Z \leq t)$$

משפט הגבול המרכזי:

היו $X_1, \dots, X_n$ - משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ ושונותה σ^2 אזי:

$$S = \sum X_i; S \sim N(n \cdot \mu, (\sigma \cdot \sqrt{n})^2)$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}; \bar{X} \sim N\left(\mu, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right);$$

קירוב נורמלי למשתנה בינומי:

יהי אמשתנה בינומי בעל פרמטרים n ו-p

כלומר $X \sim B(n, p)$. אזי לכל t ממשי עבור n גדול (לפחות: n>30) מתקיים:

$$q = p - 1; X \sim N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q}^2)$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 + 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

רווח בר-סמך לממוצע כאשר סטיית התקן ידועה:

μ - ממוצע האוכלוסייה, σ^2 - שונות האוכלוסייה, σ - סטיית התקן של האוכלוסייה.
 $\bar{x}$ - ממוצע המדגם, $1 - \alpha$ - רמת המובהקות, $1 - \alpha$ רמת הביטחון, n - גודל המדגם, d - סטיית המדגם.

$$\text{רווח בר-סמך ל- } \mu: \bar{x} \pm \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$$

גודל המדגם הדרוש כדי שברמת בטחון $1 - \alpha$, הסטייה בין μ לבין $\bar{X}$ (חצי אורך הרווח) לא תעלה על d הוא:

$$n \geq \left\{ \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \sigma}{d} \right\}^2 ; d = \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$$

רווח בר-סמך ברמת סמך עבור פרופורציה p של "הצלחות" באוכלוסייה:

$$\hat{p} \pm \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

כאשר $\hat{p} = \frac{X}{n}$ היא פרופורציית ה"הצלחות" במדגם בגודל n.

אם ידוע בוודאות ש- $p < \hat{p} < 0.5$ או $p > \hat{p} > 0.5$ אזי

גודל המדגם המבטיח שברמת סמך $1 - \alpha$ הסטייה בין p לבין $\hat{p}$ לא תעלה על $d = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ והוא:

$$n \geq \frac{z_{1-\alpha/2}^2 \hat{p}\hat{q}}{d^2}$$

אם לא שוללים את האופציה ש- p קרוב ל- 0.5 אזי מתקיים: $n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{2d} \right)^2$

אינטגרציה וגזירה בחלקים:

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

$$[u(x)/v(x)]' = [u'(x)v(x) - v'(x)u(x)] / v^2(x)$$

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int v'(x)u(x)dx$$
