

# אוניברסיטת אריאל בשומרון

## החטיבה האקדמית - הפקולטה להנדסה

מבחן בקורס : הסתברות וסטטיסטיקה

מועד ב' סמסטר א', שנה"ל תשפ"ב 21/2/2022

מספר הקורס 4422010-1,2,3

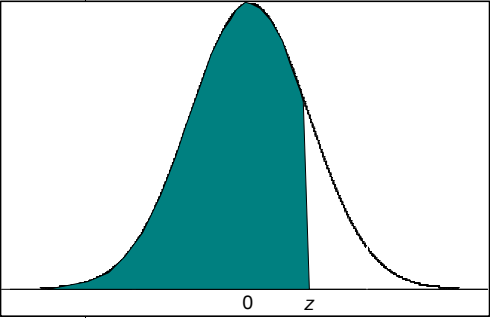
שם המרצה : ד"ר אליעזר הירשברג

מתרגלים: רן סגל, דביר רוס, צחי שביט

הוראות כלליות:

1. יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות.
2. נא לסמן על כריכת המחברת איזה שאלות בחרת.
3. כל תשובה חייבת בנימוקים ברורים ומסודרים.
4. מחשבון כיס רגיל (לא גרפי).
5. משך הבחינה : 150 דקות.

- 
1. בקופסא 20 כרטיסים. 8 מהם מסומנים בספרה 2, 5 מסומנים בספרה 7, 7 מסומנים בספרה 8. מוציאים 60 כרטיסים עם החזרה.  
א. מה ההסתברות שסכום המספרים שעל הכרטיסים שהוצאו יהיה גדול מ-350?  
ב. מה ההסתברות שאותו סכום יהיה בין 300 ל-380?
  2. בכד יש שני כדורים לבנים, 3 כדורים שחורים ו-5 כדורים צהובים. מוציאים כדור אחד מהכד. אם הכדור הוא לבן או שחור משאירים אותו בחוץ ואם הוא צהוב מחזירים אותו לכד. לאחר מכן מוציאים שוב כדור מהכד.  
א. מה ההסתברות ששני הכדורים שהוצא יהיו בעלי אותו צבע?  
ב. מה ההסתברות שבין שני הכדורים שהוצאו יהיה לפחות כדור אחד לבן?  
ג. ידוע שהכדור השני שהוצא הוא שחור. מה ההסתברות שהכדור הראשון שהוצא היה צהוב?
  3. כדי לאמוד את הגיל הממוצע של צרכני חברה מסוימת נלקח מדגם של 50 לקוחות והתקבל ממוצע 36. ידוע שסטיית התקן היא 12.  
א. בנה רווח סמך לגיל הממוצע ברמת ביטחון של 0.95.  
ב. מהו גודל המדגם הנדרש כדי שסטיית המדגם d תהיה לכל היותר 2?
  4. X הוא משתנה מקרי רציף עם פונקציית צפיפות  $f(x) = \frac{A}{x^2}$ ,  $10 < x < \infty$ .  
א. חשב את הפרמטר A  
ב. מצא את פונקציית ההתפלגות F(x)  
ג. חשב  $P(X > 12)$
  5. במפעל יש שתי מכונות. ההסתברות שבדיוק אחת מהן תפעל היא 0.35. ההסתברות ששתיהן תתקלקלנה היא 0.11. ההסתברות שהשנייה תפעל היא 0.66.  
א. מה ההסתברות שהמכונה הראשונה תפעל?  
ב. מה ההסתברות שרק המכונה השנייה תפעל?  
ג. מה ההסתברות שהמכונה השנייה התקלקלה אם ידוע שרק אחת מהן פעלה?
  6. ראובן מציע לשמיעון את המשחק הבא. תטיל מטבע עד שתקבל עץ. אם מספר ההטלות יהיה זוגי אני אשלם לך 3 שקלים. אם מספר ההטלות יהיה אי-זוגי אתה תשלם לי 2 שקלים.  
א. חשב את התוחלת של הרווח של שמיעון במשחק.  
ב. מה ההסתברות שהרווח של שמיעון יהיה חיובי אחרי 30 משחקים.

| Cumulative Probabilities for the Standard Normal (Z) Distribution |                                                                                   |        |        |        |        |                                                                                                                            |        |        |        |        |
|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|
|                                                                   |  |        |        |        |        | Values in the table correspond to the area under the curve of a standard normal random variable for a value at or below z. |        |        |        |        |
| z                                                                 | 0.00                                                                              | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05                                                                                                                       | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
| 0.0                                                               | 0.5000                                                                            | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199                                                                                                                     | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1                                                               | 0.5398                                                                            | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596                                                                                                                     | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2                                                               | 0.5793                                                                            | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987                                                                                                                     | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3                                                               | 0.6179                                                                            | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368                                                                                                                     | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4                                                               | 0.6554                                                                            | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736                                                                                                                     | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5                                                               | 0.6915                                                                            | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088                                                                                                                     | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6                                                               | 0.7257                                                                            | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422                                                                                                                     | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7                                                               | 0.7580                                                                            | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734                                                                                                                     | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8                                                               | 0.7881                                                                            | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023                                                                                                                     | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9                                                               | 0.8159                                                                            | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289                                                                                                                     | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0                                                               | 0.8413                                                                            | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531                                                                                                                     | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1                                                               | 0.8643                                                                            | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749                                                                                                                     | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2                                                               | 0.8849                                                                            | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944                                                                                                                     | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3                                                               | 0.9032                                                                            | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115                                                                                                                     | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4                                                               | 0.9192                                                                            | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265                                                                                                                     | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5                                                               | 0.9332                                                                            | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394                                                                                                                     | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6                                                               | 0.9452                                                                            | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505                                                                                                                     | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7                                                               | 0.9554                                                                            | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599                                                                                                                     | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8                                                               | 0.9641                                                                            | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678                                                                                                                     | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9                                                               | 0.9713                                                                            | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744                                                                                                                     | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0                                                               | 0.9772                                                                            | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798                                                                                                                     | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1                                                               | 0.9821                                                                            | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842                                                                                                                     | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2                                                               | 0.9861                                                                            | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878                                                                                                                     | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3                                                               | 0.9893                                                                            | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906                                                                                                                     | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4                                                               | 0.9918                                                                            | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929                                                                                                                     | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5                                                               | 0.9938                                                                            | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946                                                                                                                     | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6                                                               | 0.9953                                                                            | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960                                                                                                                     | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7                                                               | 0.9965                                                                            | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970                                                                                                                     | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8                                                               | 0.9974                                                                            | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978                                                                                                                     | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9                                                               | 0.9981                                                                            | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984                                                                                                                     | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0                                                               | 0.9987                                                                            | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989                                                                                                                     | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1                                                               | 0.9990                                                                            | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992                                                                                                                     | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2                                                               | 0.9993                                                                            | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994                                                                                                                     | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3                                                               | 0.9995                                                                            | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996                                                                                                                     | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4                                                               | 0.9997                                                                            | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997                                                                                                                     | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5                                                               | 0.9998                                                                            |        |        |        |        |                                                                                                                            |        |        |        |        |
| 4.0                                                               | 0.99997                                                                           |        |        |        |        |                                                                                                                            |        |        |        |        |
| 4.5                                                               | 0.999997                                                                          |        |        |        |        |                                                                                                                            |        |        |        |        |
| 5.0                                                               | 0.9999997                                                                         |        |        |        |        |                                                                                                                            |        |        |        |        |

## סטטיסטיקה תיאורית

סימנים בסיסיים לשימוש :

|                  |            |               |                       |
|------------------|------------|---------------|-----------------------|
| אורך האינטרוול   | $l$        | אמצע הקבוצה   | $or \quad x'$<br>$MP$ |
| צפיפות האינטרוול | $d$        | גודל המדגם    | $N$                   |
| ממוצע            | $\bar{x}$  | סכום אברים    | $\Sigma$              |
| חציון            | $M_e$      | שכיחות מוחלטת | $f$                   |
| השכיח            | $M_0$      | שכיחות מצטברת | $F$                   |
| סטיית תקן        | $\sigma$   | שכיחות יחסית  | $p$                   |
| שונות            | $\sigma^2$ | ציון תקן      | $z_i$                 |

$n$  - מספר קבוצות (מחלקות)

$L_i$  - גבול תחתון של קטע  $i$ .

$R_i$  - גבול עליון של קטע  $i$ .

$$x'_i = (L_{in} + R_i) / 2$$

מציאת טווח:

$$R = x_n - x_1 \quad (1)$$

(קיבוץ תצפיות לפי ערכים בודדים)

$$R = R_n - L_1 \quad (2)$$

(קיבוץ נתונים לפי קטעים).

$$p_i = \frac{f_i}{N}$$

$$d_i = \frac{f_i}{l_i},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x'_i \cdot f_i = \sum_{i=1}^n x'_i \cdot P_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum f_i \cdot (x'_i - \bar{x})^2 = \sum P_i \cdot (x'_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum f_i \cdot x_i'^2 - (\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (x'_i)^2 \cdot p_i - (\bar{x})^2$$

$$M_k(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x'_i)^k f_i = \sum_{i=1}^n (x'_i)^k \cdot P_i$$

$$\bar{X} = M_1(X)$$

$$\sigma^2 = M_2(X) - (M_1(X))^2$$

מציאת שכיח ( קיבוץ תצפיות לפי קטעים)

איחוד של  $k$  קבוצות בגודל

$$Mo = L_i + \frac{d_i - d_{i-1}}{(d_i - d_{i-1}) + (d_i - d_{i+1})} \cdot l_i$$

$i$  - קבוצת השכיח  $(f_i \geq f_j, 1 \leq j \leq n)$

מציאת חציון (קיבוץ תצפיות לפי קטעים)

$$Me = L_i + \frac{l_i}{f_i} \times (\frac{N}{2} - F_{i-1})$$

$i$  - קבוצת החציון  $(F_{i-1} < \frac{N}{2} \text{ ו- } F_i > \frac{N}{2})$ .

אם ניתן למצוא את  $i$  שעבורו  $F_i = \frac{N}{2}$ ,

$$M_e = R_i$$

מציאת חציון (קיבוץ תצפיות לפי ערכים בודדים)

אם ניתן למצוא את  $i$  שעבורו  $F_i > \frac{N}{2}$  ו-  $F_{i-1} < \frac{N}{2}$ .

$$M_e = x_i$$

אם ניתן למצוא את  $i$  שעבורו  $F_i = \frac{N}{2}$ ,

$$M_e = (x_i + x_{i+1}) / 2$$

$$z_i = \frac{x'_i - \bar{x}}{\sigma}$$

## אקסיומות ההסתברות

(1) תכונות כלליות של פונקציית הסתברות  $P(A)$  כאשר  $A$  - מאורע כלשהו

$\Omega$  - מרחב מאורעות או אוסף כל התוצאות האפשריות של ניסוי או מאורע וודאי.

$$P(\Phi) = 0, P(\Omega) = 1, 0 \leq P(A) \leq 1$$

(2)  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ , כאשר  $\bar{A}$  - מאורע משלים  $(A \cup \bar{A} = \Omega)$   $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (3)$$

(4)  $A, B$  מאורעות זרים אם  $A \cap B = \Phi$  ומתקיים  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**נוסחאות שימושיות נוספות:**

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) \quad (5)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}), P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) \quad (6)$$

(דה מורגן)

## קומבינטוריקה

תמורות

$$P_n = n!; \quad P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

בחירות

|                          | עם החזרה | בלי החזרה                           |
|--------------------------|----------|-------------------------------------|
| סדר חשוב<br>(חליפות)     | $n^k$    | $P_n^k = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ |
| סדר לא חשוב<br>(צירופים) |          | $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$       |

### הסתברות מותנית

$P(A/B)$  - קוראים: ההסתברות המותנה של מאורע  $A$  כאשר ידוע שהמאורע  $B$  התרחש (בקיצור, ההסתברות של  $A$  בתנאי  $B$ ).

$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(B)}, \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

אם  $A, B$  מאורעות זרים אז מתקיים  $P(A/B) = 0$

אם  $A, B$  מאורעות בלתי תלויים אז מתקיים  $P(A/B) = P(A)$ ,  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

אם  $A, B$  מאורעות תלויים אז מתקיים  $P(A/B) \neq P(A)$ ,  $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

### נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(A) = P(A/E_1) \cdot P(E_1) + \dots + P(A/E_n) \cdot P(E_n)$$

כאשר  $E_1, E_2, \dots, E_n$  מאורעות זרים שאיחודם הוא כל המרחב  $\Omega$ :  $\sum_{i=1}^n P(E_i) = 1$

### נוסחת בייז:

$$P(E_1/A) = \frac{P(A/E_1) \cdot P(E_1)}{P(A)} = \frac{P(A/E_1) \cdot P(E_1)}{P(A/E_1) \cdot P(E_1) + \dots + P(A/E_n) \cdot P(E_n)}$$

$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B) \quad \text{נוסחה נוספת:}$$

### מומנטים למשתנה בדיד

תוחלת  $E(x) = \sum x_i P(x_i)$ , שונות  $\text{Var}(x) = E(x^2) - (E(x))^2$   
תכונות של תוחלת ושונות:

$$E(b \cdot X + a) = b \cdot E(X) + a, \quad \text{Var}(b \cdot X + a) = b^2 \cdot \text{Var}(X), \quad E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

### נוסחת התוחלת השלמה

נתונים קבוצה שלמה של מאורעות זרים  $\{A_1, \dots, A_n\}$ . משתנה מקרי כלשהו אזי:  
 $E(X) = E(X|A_1) \cdot P(A_1) + E(X|A_2) \cdot P(A_2) + \dots + E(X|A_n) \cdot P(A_n)$

### התפלגות בינומית (ברנולי) $X \sim B(n, p)$

$n$  - מספר ניסויים,  $p$  - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד,  $q = 1 - p$  - נסמן:

ההסתברות שמתוך  $n$  ניסויים יהיו בדיוק  $k$  הצלחות:  $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

**תוחלת ושונות של התפלגות בינומית:**  $E(X) = np$ ,  $VAR(X) = npq$

**התפלגות גיאומטרית** (עד הצלחה ראשונה)  $X \sim G(p)$

$p$  - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, נסמן:  $q = 1 - p$

ההסתברות שההצלחה הראשונה תתרחש בניסוי מס'  $k$ :  $P(X = k) = q^{k-1} \cdot p$

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad VAR(X) = \frac{1-p}{p^2}, \quad P(X > k) = q^k, \quad P(X \leq k) = 1 - q^k$$

$$S = a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q} \quad (q < 1) \quad \text{סכום של סדרה הנדסית אינסופית}$$

**התפלגות בינומית שלילית** (מספר ניסיונות עד הצלחה מספר  $r$ )  $X \sim NB(r, p)$

$p$  - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, נסמן:  $q = 1 - p$

ההסתברות לכך שההצלחה מספר  $r$  יבוא בניסוי מס'  $k$ :  $P(X = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}$

$$E(X) = \frac{r}{p}, \quad VAR(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

הערה: התפלגות הגיאומטרית הוא מקרה פרטי של התפלגות בינומית שלילית, עם  $r = 1$ .

נתונים  $X_1, X_2, \dots, X_r$  משתנים מקריים גיאומטריים בלתי תלויים כך ש-  $X_i \sim G(p)$  עבור כל  $1 \leq i \leq r$ , אזי  $\sum_{i=1}^r X_i \sim NB(r, p)$ .

**התפלגות היפרגאומטרית**

באוכלוסיה  $N$  פריטים, מתוכם  $D$  פריטים מיוחדים. מוציאים מהאוכלוסיה  $n$  פריטים ללא החזרה.  $X$  = מספר פריטים מיוחדים שהוצאו.

$$P(X = k) = \frac{C_D^k \cdot C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} \quad \text{ההסתברות שמתוך } n \text{ פריטים יהיו } k \text{ פריטים מיוחדים}$$

תוחלת ושונות:

$$E(X) = n \cdot \frac{D}{N} \quad VAR(X) = n \cdot \frac{D}{N} \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

**התפלגות פואסון**

התפלגות פואסון עם פרמטר  $\lambda$ :  $X \sim P(\lambda)$

$\lambda$  הוא המספר הממוצע של האירועים ליחידת זמן,  $\lambda > 0$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \quad \text{ההסתברות שביחידת הזמן יתרחשו בדיוק } k \text{ אירועים היא}$$

$$VAR(X) = \lambda, \quad E(X) = \lambda \quad \text{תוחלת ושונות}$$

**קירוב פואסון לבינומית** (עבור  $n$  גדול ו  $p$  קטן) מציבים  $\lambda = np$

**משתנה מקרי רציף**

$f(x)$  פונקציית צפיפות,  $a < x < b$ ,  $F(x)$  פונקציית ההתפלגות.

$$F(b) = 1, \quad F(a) = 0, \quad F'(x) = f(x), \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \int_a^b f(x) dx = 1$$

$F(x)$  אינה יורדת, כלומר אם:  $a \leq c < d \leq b$  אז  $F(c) \leq F(d)$ .

$$P(X < c) = \int_a^c f(x) dx = F(c), \quad P(c < X < d) = \int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c)$$

$$E(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx, \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2, \quad E(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx,$$

### התפלגות מעריכית $X \sim \exp(\lambda)$

פונקצית הצפיפות של  $X$  היא:  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  כאשר  $x \geq 0$ .  
פונקצית ההתפלגות של  $X$  היא:  $F(t) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ .

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{VAR}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

### התפלגות ארלנג $X \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$

פונקצית הצפיפות של  $X$  היא:  $f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$

$$E(X) = \frac{k}{\lambda}, \quad \text{VAR}(X) = \frac{k}{\lambda^2}$$

הערה: נתונים  $X_1, X_2, \dots, X_k$  משתנים מקריים מעריכיים בלתי תלויים כך ש-  $X_i \sim \exp(\lambda)$  עבור כל  $1 \leq i \leq k$  אזי  $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$ .

### התפלגות נורמלית $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (גאוס)

$X$  הוא משתנה נורמלי עם פרמטרים  $\mu$  ו- $\sigma$ , אם פונקצית הצפיפות שלו ניתנת על ידי סימונים:  $E(X) = \mu$ ,  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ .

אם  $X \sim N(\mu, \sigma)$  אזי  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

פונקצית ההתפלגות של  $X$  היא:  $P(X \leq t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$

כאשר  $\Phi(t) = P(Z \leq t)$  היא פונקצית ההתפלגות המצטברת של המשתנה הנורמלי הסטנדרטי והיא נתונה בטבלה. תכונות של פונקצית  $\Phi(t)$ :

$$z_{1-\alpha} = -z_\alpha, \quad P(t_1 < Z < t_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1), \quad P(-a < Z < a) = 2\Phi(a) - 1$$

$$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t), \quad P(Z > t) = 1 - P(Z \leq t)$$

### סכום והפרש התפלגויות נורמליות:

נתונים  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  משתנים מקריים בלתי תלויים, אזי מתקיים:

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

### משפט הגבול המרכזי:

היו  $X_1, \dots, X_n$  - משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה  $\mu$  ושונותה  $\sigma^2$  אזי:

$$S \sim N(n \cdot \mu, (\sigma \cdot \sqrt{n})^2) \quad ; \quad S = \sum X_i$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right) \quad ; \quad \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

### קירוב נורמלי למשתנה בינומי:

יהי  $X$  משתנה בינומי בעל פרמטרים  $n$  ו- $p$

כלומר  $X \sim B(n, p)$ . אזי לכל  $t$  ממשי עבור  $n$  גדול (לפחות:  $n > 30$ ) מתקיים:

$$q = p - 1 ; X \sim N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q}^2)$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 + 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

### רווח בר- סמך לממוצע כאשר סטיית התקן ידועה:

$\mu$  - ממוצע האוכלוסייה,  $\sigma^2$  - שונות האוכלוסייה,  $\sigma$  - סטיית התקן של האוכלוסייה.  
 $\bar{x}$  - ממוצע המדגם,  $\alpha$  - רמת המובהקות,  $1-\alpha$  רמת הביטחון,  $n$  - גודל המדגם,  $d$  - סטיית המדגם.

$$\text{רווח בר-סמך ל- } \mu : \bar{x} \pm \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$$

גודל המדגם הדרוש כדי שברמת בטחון  $1-\alpha$ , הסטייה בין  $\mu$  לבין  $\bar{X}$  (חצי אורך הרווח) לא תעלה על  $d$  הוא:

$$d = \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot \sigma}{\sqrt{n}} ; n \geq \left\{ \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \sigma}{d} \right\}^2$$

### רווח בר-סמך ברמת סמך עבור פרופורציה $p$ של "הצלחות" באוכלוסייה:

$$\hat{p} \pm \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

כאשר  $\hat{p} = \frac{X}{n}$  היא פרופורציית ה"הצלחות" במדגם בגודל  $n$ .

אם ידוע בוודאות ש-  $p < \hat{p} < 0.5$  או  $p > \hat{p} > 0.5$  אזי

גודל המדגם המבטיח שברמת סמך  $1-\alpha$  הסטייה בין  $p$  לבין  $\hat{p}$  לא תעלה על  $d = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$  והוא:

$$n \geq \frac{z_{1-\alpha/2}^2 \hat{p}\hat{q}}{d^2}$$

אם לא שוללים את האופציה ש-  $p$  קרוב ל- 0.5 אזי מתקיים:  $n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{2d}\right)^2$

## דף נוסחאות מורחב עם אישור בלבד

### סטטיסטיקה תיאורית

סימנים בסיסיים לשימוש :

| אורך האינטרוול   | $l$        | אמצע הקבוצה   | or $x'$<br>$MP$ |
|------------------|------------|---------------|-----------------|
| צפיפות האינטרוול | $d$        | גודל המדגם    | $N$             |
| ממוצע            | $\bar{x}$  | סכום אברים    | $\Sigma$        |
| חציון            | $M_e$      | שכיחות מוחלטת | $f$             |
| השכיח            | $M_0$      | שכיחות מצטברת | $F$             |
| סטיית תקן        | $\sigma$   | שכיחות יחסית  | $p$             |
| שונות            | $\sigma^2$ | ציון תקן      | $z_i$           |

$n$  - מספר קבוצות (מחלקות)

$L_i$  - גבול תחתון של קטע  $i$ .

$R_i$  - גבול עליון של קטע  $i$ .

$$x'_i = (L_{in} + R_i) / 2$$

מציאת טווח:

$$R = x_n - x_1 \quad (1)$$

(קיבוץ תצפיות לפי ערכים בודדים)

$$R = R_n - L_1 \quad (2)$$

(קיבוץ נתונים לפי קטעים.)

$$p_i = \frac{f_i}{N}$$

$$d_i = \frac{f_i}{l_i},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x'_i \cdot f_i = \sum_{i=1}^n x'_i \cdot P_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum f_i \cdot (x'_i - \bar{x})^2 = \sum P_i \cdot (x'_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum f_i \cdot x_i'^2 - (\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (x'_i)^2 \cdot p_i - (\bar{x})^2$$

מציאת שכיח ( קיבוץ תצפיות לפי קטעים)

$$Mo = L_i + \frac{d_i - d_{i-1}}{(d_i - d_{i-1}) + (d_i - d_{i+1})} \cdot l_i$$

$i$  - קבוצת השכיח  $(f_i \geq f_j, 1 \leq j \leq n)$

מציאת חציון (קיבוץ תצפיות לפי קטעים)

$$Me = L_i + \frac{l_i}{f_i} \times (\frac{N}{2} - F_{i-1})$$

$i$  - קבוצת החציון  $(F_{i-1} < \frac{N}{2} \text{ ו- } F_i > \frac{N}{2})$ .

אם ניתן למצוא את  $i$  שעבורו  $F_i = \frac{N}{2}$ ,

$$M_e = R_i$$

מציאת חציון (קיבוץ תצפיות לפי ערכים בודדים)

אם ניתן למצוא את  $i$  שעבורו  $F_i > \frac{N}{2}$  ו-  $F_{i-1} < \frac{N}{2}$ .

$$M_e = x_i$$

אם ניתן למצוא את  $i$  שעבורו  $F_i = \frac{N}{2}$ ,

$$M_e = (x_i + x_{i+1}) / 2$$

$$z_i = \frac{x'_i - \bar{x}}{\sigma}$$

## אקסיומות ההסתברות

(1) תכונות כלליות של פונקציית הסתברות  $P(A)$  כאשר  $A$  - מאורע כלשהו

$\Omega$  - מרחב מאורעות או אוסף כל התוצאות האפשריות של ניסוי או מאורע וודאי.

$$P(\Phi) = 0, P(\Omega) = 1, 0 \leq P(A) \leq 1$$

(2)  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ ,  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$  כאשר  $\bar{A}$  - מאורע משלים  $(A \cup \bar{A} = \Omega)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (3)$$

(4)  $A, B$  מאורעות זרים אם  $A \cap B = \Phi$  ומתקיים  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**נוסחאות שימושיות נוספות:**

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) \quad (5)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}), P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) \quad (6) \quad (\text{דה מורגן})$$

## שיטת ריבוע הקסם:

מציירים ריבוע. בקצה השמאלי כותבים  $A, \bar{A}$  ובקצה העליון כותבים  $B, \bar{B}$ , כך נקבל שתי שורות ושתי עמודות.

בקצה הימני של השורה של  $A$  כותבים  $P(A)$ ,

בקצה הימני של השורה של  $\bar{A}$  כותבים  $P(\bar{A})$ ,

בקצה התחתון של העמודה של  $B$  כותבים  $P(B)$ ,

בקצה התחתון של העמודה של  $\bar{B}$  כותבים  $P(\bar{B})$ ,

בפינה הימנית התחתונה כותבים 1, בארבע המשבצות באמצע כותבים את הערכים :

$$P(A \cap B) \text{ בשורה של } A \text{ ובעמודה של } B$$

$$P(\bar{A} \cap B) \text{ בשורה של } A \text{ ובעמודה של } \bar{B}$$

$$P(A \cap \bar{B}) \text{ בשורה של } \bar{A} \text{ ובעמודה של } \bar{B}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) \text{ בשורה של } \bar{A} \text{ ובעמודה של } \bar{B}$$

נשים לב שסכום שני המספרים בצד שמאל בכל שורה שווה למספר המופיע בקצה הימני של השורה. סכום שני המספרים למעלה בכל עמודה שווה למספר המופיע בקצה התחתון של כל עמודה. אם נתונים שלושה ערכים בריבוע, כך שלא כל השלושה באותה שורה או באותה העמודה, ניתן לחשב את שאר הערכים בעזרתם.

## קומבינטוריקה

תמורות

$$P_n = n!; \quad P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

בחירות

|                                 | עם החזרה | בלי החזרה                           |
|---------------------------------|----------|-------------------------------------|
| <b>סדר חשוב</b><br>(חליפות)     | $n^k$    | $P_n^k = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ |
| <b>סדר לא חשוב</b><br>(צירופים) |          | $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$       |

חישוב של מספר אפשרויות למאורעות שלא יקרו נעשה על ידי הפחתת מספר האפשרויות שהמאורעות כן יקרו מכלל האפשרויות (למשל מספר האפשרויות ששני אנשים לא ישבו ביחד מחשבים על ידי הפחתה מכלל האפשרויות את מספר האפשרויות ששני האנשים כן ישבו ביחד).

חישוב של הסתברות לפעולה מסוימת מתוך כלל הפעולות מחושב על ידי חישוב מספר האפשרויות לפעולה המסוימת חלקי מספר האפשרויות עבור כלל הפעולות.

## הסתברות מותנית

$P(A/B)$  - קוראים: ההסתברות המותנה של מאורע  $A$  כאשר ידוע שהמאורע  $B$  התרחש (בקיזור, ההסתברות של  $A$  בתנאי  $B$ ).

$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(B)}, \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

אם  $A, B$  מאורעות זרים אז מתקיים  $P(A/B) = 0$

אם  $A, B$  מאורעות בלתי תלויים אז מתקיים  $P(A/B) = P(A)$ ,  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

אם  $A, B$  מאורעות תלויים אז מתקיים  $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ ,  $P(A/B) \neq P(A)$

**נוסחת ההסתברות השלמה:**

$$P(A) = P(A/E_1) \cdot P(E_1) + \dots + P(A/E_n) \cdot P(E_n)$$

כאשר  $E_1, E_2, \dots, E_n$  מאורעות זרים שאיחודם הוא כל המרחב  $\Omega$ :  $\sum_{i=1}^n P(E_i) = 1$

**נוסחת בייז:**

$$P(E_1/A) = \frac{P(A/E_1) \cdot P(E_1)}{P(A)} = \frac{P(A/E_1) \cdot P(E_1)}{P(A/E_1) \cdot P(E_1) + \dots + P(A/E_n) \cdot P(E_n)}$$

$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B) \quad \text{נוסחה נוספת:}$$

**שיטת העצים:**

בונים עץ כך שבהתחלה משרטטים  $n$  ענפים מסומנים ב-  $E_1, E_2, \dots, E_n$  שיוצאים מנקודה מסוימת, וכותבים על כל ענף את ההסתברויות המתאימות  $P(E_1), P(E_2), \dots, P(E_n)$ . אחר כך, מורידים מקצה של כל אחד מהענפים ענף נוסף המסומן ב-  $A/E_1, A/E_2, \dots, A/E_n$  בהתאמה, וכותבים על כל אחד מהענפים החדשים את ההסתברויות  $P(A/E_1), P(A/E_2), \dots, P(A/E_n)$ . כעת, כדי לחשב  $P(A)$ , מכפילים כל אחד מהערכים  $P(A/E_1), P(A/E_2), \dots, P(A/E_n)$  בערכים  $P(E_1), P(E_2), \dots, P(E_n)$  שמעליו, ומחברים את הערכים מהענפים השונים שהתקבלו.

**מומנטים למשתנה בדיד**

תוחלת  $E(x) = \sum x_i P(x_i)$ , שונות  $Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2$   
תכונות של תוחלת ושונות:

$$E(b \cdot X + a) = b \cdot E(X) + a, \quad Var(b \cdot X + a) = b^2 \cdot Var(X), \quad E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

**התפלגות בינומית** (ברנולי)  $X \sim B(n, p)$

$n$  - מספר ניסויים,  $p$  - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד,  $q = 1 - p$  : נסמן

**ההסתברות** שמתוך  $n$  ניסויים יהיו בדיוק  $k$  הצלחות:  $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

**תוחלת ושונות** של התפלגות בינומית:  $E(X) = np$ ,  $Var(X) = npq$

"הצלחה בניסוי" היא הפעולה ש-  $X$  מודד, ללא קשר למשמעות שלו כדבר טוב (למשל אם רוצים לחשב הסתברות לבחור  $k$  מוצרים פגומים מתוך  $n$  מוצרים עם החזרה, אזי "הצלחה בניסוי" הוא לבחור מוצר פגום).

**התפלגות היפרגיאומטרית**

באוכלוסיה  $N$  פריטים, מתוכם  $D$  פריטים מיוחדים. מוציאים מהאוכלוסיה  $n$  פריטים **ללא החזרה**.  $X$  = מספר פריטים מיוחדים שהוצאו.

ההסתברות שמתוך  $n$  פריטים יהיו  $k$  פריטים מיוחדים:  $P(X = k) = \frac{C_D^k \cdot C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$

תוחלת ושונות:

$$E(X) = n \cdot \frac{D}{N} \quad \text{VAR}(X) = n \cdot \frac{D}{N} \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

**התפלגות גיאומטרית** (עד הצלחה ראשונה)  $X \sim G(p)$

$p$  - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, נסמן:  $q = 1 - p$

ההסתברות שההצלחה הראשונה תתרחש בניסוי מס'  $k$ :  $P(X = k) = q^{k-1} \cdot p$

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad \text{VAR}(X) = \frac{1-p}{p^2}, \quad P(X > k) = q^k, \quad P(X \leq k) = 1 - q^k$$

$$S = a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q} \quad (q < 1) \quad \text{סכום של סדרה הנדסית אינסופית}$$

**התפלגות פואסון**

התפלגות פואסון עם פרמטר  $\lambda$ :  $X \sim P(\lambda)$

$\lambda$  הוא המספר הממוצע של האירועים ליחידת זמן,  $\lambda > 0$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \quad \text{ההסתברות שביחידת הזמן יתרחשו בדיוק } k \text{ אירועים היא}$$

$$\text{VAR}(X) = \lambda, \quad E(X) = \lambda \quad \text{תוחלת ושונות}$$

**קירוב פואסון לבינומית** (עבור  $n$  גדול ו  $p$  קטן) מציבים  $\lambda = np$

בהתפלגות פואסון חשוב להשתמש בממוצע ליחידת הזמן שרוצים לחשב, ואם בנתון המקורי של הממוצע הוא ליחידת זמן אחר, צריכים לחשב את הממוצע ליחידת הזמן שהתבקשנו בשאלה של חישוב ההסתברות (למשל, אם התבקשנו לחשב את ההסתברות שאירוע מסוים יתרחש מספר פעמים בשעה, ונתון שהאירוע מתרחש מספר פעמים בממוצע בדקה, צריך לחשב  $\lambda$  שיהיה מספר הפעמים שהאירוע יתרחש מספר הפעמים בממוצע בשעה).

**משתנה מקרי רציף**

$f(x)$  פונקציית צפיפות,  $a < x < b$ ,  $F(x)$  פונקציית ההתפלגות.

$$F(b) = 1, \quad F(a) = 0, \quad F'(x) = f(x), \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \int_a^b f(x) dx = 1$$

$F(x)$  אינה יורדת, כלומר אם:  $a \leq c < d \leq b$  אז  $F(c) \leq F(d)$ .

$$P(X < c) = \int_a^c f(x) dx = F(c), \quad P(c < X < d) = \int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c)$$

$$E(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx, \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2, \quad E(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx,$$

**התפלגות נורמלית** (גאוס)  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X$  הוא משתנה נורמלי עם פרמטרים  $\mu$  ו- $\sigma$ , אם פונקציית הצפיפות שלו ניתנת על ידי

$$\text{סימונים: } E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2$$

$$\text{אם } X \sim N(\mu, \sigma) \text{ אזי } Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\text{פונקציית התפלגות של } X \text{ היא: } P(X \leq t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$$

כאשר  $\Phi(t) = P(Z \leq t)$  היא פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה הנורמלי הסטנדרטי

והיא נתונה בטבלה. תכונות של פונקציית  $\Phi(t)$ :

$$P(-a < Z < a) = 2\Phi(a) - 1, \quad P(t_1 < Z < t_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1), \quad z_{1-\alpha} = -z_\alpha$$

$$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t), \quad P(Z > t) = 1 - P(Z \leq t)$$

### משפט הגבול המרכזי

יהיו  $X_1, \dots, X_n$  - משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה  $\mu$  ושונותה  $\sigma^2$  אזי

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq t\right) = \Phi\left(\frac{t - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \quad \text{או} \quad \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\cdot\mu, n\cdot\sigma^2)$$

$$P\left(\bar{X} \leq t\right) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \quad \text{או} \quad \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

### קירוב נורמלי למשתנה בינומי

יהי  $X$  משתנה בינומי בעל פרמטרים  $n$  ו- $p$  כלומר  $X \sim B(n, p)$ , אזי עבור  $n$  מספיק גדול ( $n > 30$ ) מתקיים:

$$X \sim N(np, np(1-p)); P(X \leq k) = \Phi\left(\frac{k + 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

### סכום והפרש התפלגויות נורמליות

יהיו  $X$  ו- $Y$  משתנים מקריים נורמליים בלתי תלויים כך ש:  $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2); Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

אזי מתקיים:  $X \pm Y \sim N(\mu_x \pm \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_x - \mu_y, \frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}\right); P(\bar{X} - \bar{Y} \leq t) = \Phi\left(\frac{t - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}}\right)$$

### רווח בר-סמך לממוצע כאשר סטיית התקן ידועה:

$\mu$  - ממוצע האוכלוסייה,  $\sigma^2$  - שונות האוכלוסייה,  $\sigma$  - סטיית התקן של האוכלוסייה.

$\bar{x}$  - ממוצע המדגם,  $\alpha$  - רמת המובהקות,  $1-\alpha$  רמת הביטחון,  $n$  - גודל המדגם

$$\bar{x} - \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}; \quad \Phi(z_{1-\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad : \mu \text{ - רווח בר-סמך ל-}$$

גודל המדגם הדרוש כדי שברמת בטחון  $1-\alpha$ , הסטייה בין  $\mu$  לבין  $\bar{X}$  לא תעלה על  $d = \frac{z_{1-\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}}$  הוא:

$$n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \sigma}{d}\right)^2$$

### רווח בר-סמך עבור פרופורציה

$$\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad : \text{רווח בר-סמך עבור פרופורציה } p$$

כאשר  $\hat{p} = \frac{x}{n}$  היא פרופורציית ה"הצלחות" במדגם בגודל  $n$

אם ידוע בוודאות ש-  $p < \hat{p} < 0.5$  או  $p > \hat{p} > 0.5$  אזי

גודל המדגם המבטיח שברמת סמך  $1-\alpha$  הסטייה בין  $p$  לבין  $\hat{p}$  לא תעלה על  $d = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

והוא :  $n \geq \frac{z_{1-\alpha/2}^2 \cdot \hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{d^2}$  . כאשר  $\hat{p}$  הוא הערך הקרוב ביותר ל- 0.5 שיכול להתקבל.

אם לא שוללים את האופציה ש-  $p$  קרוב ל- 0.5 אזי מתקיים :  $n \geq \left( \frac{z_{1-\alpha/2}}{2d} \right)^2$

### אינטגרציה וגזירה בחלקים:

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

$$[u(x)/v(x)]' = [u'(x)v(x) - v'(x)u(x)]/v^2(x)$$

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int v'(x)u(x)dx$$