פתרון תרגיל 6 באלגברה לינארית לניהול

1) א(1) מצאו את ההפוכה של

$$A=\begin{pmatrix}1&5\\2&4\end{pmatrix}$$

<u>פתרון:</u> נדרש $(A|I)\to(I|A^{-1})$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&5&1&0\\2&4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&5&1&0\\0&-6&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2/-6}$$

$$\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&5&1&0\\0&1&\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-5R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-\frac{2}{3}&\frac{5}{6}\\0&1&\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}\end{array}\right)$$

ולכן:
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{5}{6}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

נבדוק:
$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&5\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{5}{6}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

2) כתוב את A כמכפלת מטריצות אלמנטריות.

כדי לעבור מ-A ל-I ביצענו 3 פעולות אלמנטריות:

$R_2\leftarrow R_2-2R_1 \rightsquigarrow$ המטריצה המתאימה: $E_{21}(-2)$

$R_2\leftarrow R_2/-6 \rightsquigarrow$ המטריצה המתאימה: $E_2(-\frac{1}{6})$

$R_1\leftarrow R_1-5R_2 \leftarrow$ המטריצה המתאימה: $E_{12}(-5)$

ולכן:
$$I=E_{12}(-5)E_2(-\tfrac{1}{6})E_{21}(-2)A$$

$$\Leftarrow A=\left(E_{12}(-5)E_2(-\tfrac{1}{6})E_{21}(-2)\right)^{-1}$$
$$=E_{21}^{-1}(-2)E_2^{-1}(-\tfrac{1}{6})E_{12}^{-1}(-5)=$$
$$=E_{21}(2)E_2(-6)E_{12}(5)$$

נבדוק:

$$E_{21}(2)E_2(-6)E_{12}(5)=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&5\\ \dots\end{pmatrix}$$

(ב)(1) מצאו את ההפוכה של

$$B=\begin{pmatrix}1&3&5\\0&2&4\\1&4&5\end{pmatrix}$$

<u>פתרון</u>: נדרג $(B|I)\to(I|B^{-1})$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&5&1&0&0\\0&2&4&0&1&0\\1&4&5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&5&1&0&0\\0&2&4&0&1&0\\0&1&0&-1&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&5&1&0&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&2&4&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&5&1&0&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&4&2&1&-2\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3/4}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&5&1&0&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-3R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&5&4&0&-3\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-5R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{3}{2}&-\frac{5}{4}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

ולכן

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{5}{4}&-\frac{1}{2}\\-1&0&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

נבדוק:

$$BB^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&5\\0&2&4\\1&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{5}{4}&-\frac{1}{2}\\-1&0&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(2) כדי לעבור מ-A ל-I הפעלנו 6 פעולות אלמנטריות:

$R_3\leftarrow R_3-R_1$ ⟵ המטריצה האלמנטרית: $E_{31}(-1)$

$R_2\leftrightarrow R_3$ ⟵ המטריצה האלמנטרית: E_{23}

$R_3\leftarrow R_3-2R_2$ ⟵ המטריצה האלמנטרית: $E_{32}(-2)$

$E_3\left(\frac{1}{4}\right)$:המטריצה המתאימה $\longleftarrow R_3 \leftarrow R_3/4$

$E_{12}(-3)$:המטריצה המתאימה $\longleftarrow R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2$

$E_{13}(-5)$:המטריצה המתאימה $\longleftarrow R_1 \leftarrow R_1 - 5R_3$

ולכן:

$$I = E_{13}(-5)E_{12}(-3)E_3\left(\tfrac{1}{4}\right)E_{32}(-2)E_{23}E_{31}(-1)B$$

$$\Leftarrow B = \left(E_{13}(-5)E_{12}(-3)E_3\left(\tfrac{1}{4}\right)E_{32}(-2)E_{23}E_{31}(-1)\right)^{-1}$$

$$= E_{31}^{-1}(-1)E_{23}^{-1}E_{32}^{-1}(-2)E_3^{-1}\left(\tfrac{1}{4}\right)E_{12}^{-1}(-3)E_{13}^{-1}(-5)$$

$$= E_{31}(1)E_{23}E_{32}(2)E_3(4)E_{12}(3)E_{13}(5)$$

ג(1) נמצא את ההפיכה ל

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

פתרון: נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow -R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3/3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 + R_3]{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

לכן

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

נבדוק:

$$C\cdot C^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ב) כדי להגיע מ-C ל-I בצענו את הפעולות הבאות:

$R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \longleftarrow$ המטריצה האלמנטרית: $E_{21}(-1)$

$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \longleftarrow$ המטריצה האלמנטרית: $E_{31}(-2)$

$R_2 \leftarrow -R_2 \longleftarrow$ המטריצה האלמנטרית: $E_2(-1)$

$R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \longleftarrow$ המטריצה האלמנטרית: $E_{32}(-1)$

$R_3 \leftarrow R_3/3 \longleftarrow$ המטריצה האלמנטרית: $E_3(\frac{1}{3})$

$R_1 \leftarrow R_1 - R_2 \longleftarrow$ המטריצה האלמנטרית: $E_{12}(-1)$

$R_1 \leftarrow R_1 - 2R_3 \longleftarrow$ המטריצה האלמנטרית: $E_{13}(-2)$

$R_2 \leftarrow R_2 + R_3 \longleftarrow$ המטריצה האלמנטרית: $E_{23}(1)$

ולכן:

$$I = E_{23}(1)E_{13}(-2)E_{12}(-1)E_3(\tfrac{1}{3})E_{32}(-1)E_2(-1)E_{31}(-2)E_{21}(-1)C$$

$$\Longleftarrow$$

$$C=\left(E_{23}(1)E_{13}(-2)E_{12}(-1)E_3(\tfrac{1}{3})E_{32}(-1)E_2(-1)E_{31}(-2)E_{21}(-1)\right)^{-1}=$$

$$=E_{21}^{-1}(-1)E_{31}^{-1}(-2)E_2^{-1}(-1)E_{32}^{-1}(-1)E_3^{-1}(\tfrac{1}{3})E_{12}^{-1}(-1)E_{13}^{-1}(-2)E_{23}^{-1}(1)=$$

$$=E_{21}(1)E_{31}(2)E_2(-1)E_{32}(1)E_3(3)E_{12}(1)E_{13}(2)E_{23}(-1)$$

(2) באמצעות 1(א) פתור את המערכת:

$$\begin{cases} x+5y=-4 \\ 2x+4y=-2 \end{cases}$$

פתרון: המערכת ניתנת לכתיבה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

כעת מ-(1)(א) ראינו ש-

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

לכן פתרון המערכת יהיה:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ולכן פתרון המערכת הוא $x=1$, $y=-1$.

(3)(א) נמצא את A^{-1} עבור המטריצה

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

פתרון: נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3-5R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow (2R_3)}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -10 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow -R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \leftarrow R_1 + R_3]{R_2 \leftarrow R_2 - R_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

לכן

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

נבדוק:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ה) פתרו באמצעות סעיף ד' את המערכת:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 2y + z = 1 \\ 5x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

<u>פתרון</u>: המערכת ניתנת לכתיבה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ולכן הפתרון של המערכת יהיה:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&2&1\\5&2&-3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8&-1&-3\\-5&1&2\\10&-1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-6\\13\end{pmatrix}$$

היינו: $x=10$, $y=-6$, $z=13$.

4) א) נחשב:

$$(I-A)(A^2+A+I)=$$
$$=\cancel{A^2}+\cancel{A}+I-A^3-\cancel{A^2}-\cancel{A}=I-A^3$$

ב) נתון כי $A^3=0$. בעזרת זה נקבל מסעיף א':

$$(I-A)(A^2+A+I)=I$$

ולכן: $I-A$ הפיכה, $^{-1}$

$$(I-A)^{-1}=A^2+A+I$$

5) א) מצאו את A^{-1} של $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$

פתרון: נדרג:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\2&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-3&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2/-3}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-2R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&\frac{2}{3}\\0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

ולכן $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ שהיא מטריצה סימטרית.

ב) הוכח כי המטריצה ההפוכה של מטריצה סימטרית גם היא סימטרית.

פתרון: A הפיכה, ולכן $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ (*). A סימטרית, ולכן $A=A^t$

נפעיל שחלוף על (*): $(AA^{-1})^t=(A^{-1}A)^t=(I)^t=I$

$(A^{-1})^tA=A(A^{-1})^t=I$ $\overset{\text{סימטרית}}{\Leftarrow}$ $(A^{-1})^tA^t=A^t(A^{-1})^t=I$ $\Leftarrow$