דף נוסחאות חשבון אינפיניטסימאלי 1

אלגברה

נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

ממעלה שנייה $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

ממעלה שלישית $(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

ממעלה n $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + b^{n-1})$

פתרונות המשוואה הריבועית: $x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

חזקות ושורשים:

חזקות עם מעריך טבעי: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$

$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

לוגריתמים:

הגדרת הלוגריתם: $a^b = x \Leftrightarrow \log_a x = b$

חוקי הלוגריתם: $a^{\log_a x} = x$, $\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, $\log_a x^n = n\cdot\log_a x$

מעבר מבסיס לבסיס: $\log_m x = \dfrac{\log_a x}{\log_a m}$

טריגונומטריה

זהויות: זהויות יסודיות

$1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $1+\cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2 a}$

$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha$ $\cos(90-\alpha) = \sin\alpha$ $\tan(90-\alpha) = \cot\alpha$ $\cot(90-\alpha) = \tan\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\sin(180-\alpha) = \sin\alpha$ $\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$

סכום והפרש זוויות:

$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

$\cot(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$

זווית כפולה וחצי זווית:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2} \qquad \tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

__סכום והפרש פונקציות:__

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

__מכפלת פונקציות:__

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \qquad \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)] \qquad \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

__ישר:__

המשוואה המפורשת של ישר $(m=\tan\alpha)$: $y=mx+n$

משוואת ישר ששיפועו m העובר דרך הנקודה (x_1,y_1) : $y-y_1=m(x-x_1)$

שיפוע ישר העובר דרך הנקודות (x_2,y_2) , (x_1,y_1) : $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

התנאי להקבלה של שני ישרים ששיפועיהם m_1 ו- m_2 : $m_1=m_2$

התנאי לניצבות של שני ישרים ששיפועיהם m_1 ו- m_2 : $m_1\cdot m_2=-1$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגראלי

__גבול של סדרה__:

כלל המנה: תהי a_n סדרה חיובית, ונניח ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}\infty & q>1\\ 0 & q<1\end{cases}$.

כלל השורש: עבור סדרה חיובית a_n מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

כלל הסנדוויץ': אם $a_n\le b_n\le c_n$ לכל n ו- $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=l$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=l$.

__גבול של פונקציה__:

- $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$
- אם $f(x)$ היא פונקציה חסומה ו- $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, אז $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty}a^x=\begin{cases}\infty & a>1\\ 0 & 0<a<1\end{cases}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}0 & a>1\\ \infty & 0<a<1\end{cases}$

__כלל לופיטל__:

במקרה של $0\cdot\infty$: $\lim f(x)\cdot g(x)=\lim\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$

במקרה של ∞^0 , 1^∞ , 0^0: $\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x)\ln(f(x))}$

במקרה של $\infty - \infty$: אם אפשרי, מחפשים מכנה משותף, אחרת $\lim f(x) - g(x) = \lim \ln\left(\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}\right)$

<u>נגזרות</u>:

כללי גזירה:

הנגזרת	הפונקציה
$F'(x) = a \cdot f'(x)$	$F(x) = a \cdot f(x)$
$F'(x) = f'(x) \pm g'(x)$	$F(x) = f(x) \pm g(x)$
$F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	$F(x) = f(x) \cdot g(x)$
$F'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$	$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
$F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$	$F(x) = g(f(x))$

נגזרות של פונקציות:

הנגזרת	הפונקציה
$y' = nx^{n-1}$	$y = x^n$
$y' = 0$	$y = a$
$y' = \cos x$	$y = \sin x$
$y' = -\sin x$	$y = \cos x$
$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \tan x$
$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$y = \cot x$
$y' = \frac{1}{x}\log_a e$	$y = \log_a x$
$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln x$
$y' = a^x \ln a$	$y = a^x$
$y' = e^x$	$y = e^x$
$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \arctan x$
$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin x$

<u>אינטגרלים מיידיים</u>:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c \qquad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \qquad \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \qquad \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

$$\int ln\, x dx = x\, ln\, x - x + c \qquad \int \frac{dx}{(mx+n)^2 + a^2} = \frac{1}{am}\arctan\left(\frac{mx+n}{a}\right) + c$$

<u>אינטגרציה בחלקים</u>: $\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$.

<u>אסימפטוטה משופעת:</u> $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $n = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx$.

פונקציה בשני משתנים

נקודות קיצון מקומיות בתחום פתוח:

מציאת הנקודות הקריטיות: הנקודות הקריטיות הן הנקודות $\left(x_0\,, y_0\right)$ המקיימות את המערכת $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$.

מיון הנקודות הקריטיות: בכל נקודה קריטית נחשב את הביטויים $A = f''_{xx}$, $B = f''_{xy}$, $C = f''_{yy}$ ו- $D = AC - B^2$. אם $D < 0$ הנקודה הינה נקודת אוכף. אם $D > 0$ הנקודה הינה נקודת קיצון מקומית מסוג מקסימום אם $A < 0$ ומסוג מינימום אם $A > 0$.