

## אלגברה לינארית להנדסה:

תאריך: 30.6.21

תשפ"א סמסטר ב', מועד א'.

מספר הקורס: 2-4210110-3, 2-4610110-3, 2-4410110-4, 2-4210110-3, 2-4112210-1,

3-2-4310110.

מרצה: ד"ר בונימוביץ סבטלנה, ד"ר יונה צרניאבסקי, ד"ר רותי ליבוביץ, ד"ר אלקס קפלונובסקי.

מתרגלים: אורית אברהם, יפעת מרגלית ברון, רננה כהן, ענבר סדון, מור דנינו, פז צרדמן.

## פתרונות

**שאלה 1.** (25 נקודות) נתבונן במערכת הבאה עם נעלמים מרוכבים  $x, y$  ופרמטר מרוכב  $k$ :

$$\begin{cases} 2x - ky = 2 \\ kx + (1 - k)y = 1 + i \end{cases}$$

א. (9 נקודות) עבור אילו ערכים מרוכבים של הפרמטר  $k$  למערכת זו פתרון יחיד?

ב. (8 נקודות) עבור אילו ערכים מרוכבים של  $k$  למערכת זו אין סוף פתרונות?

ג. (8 נקודות) עבור אילו ערכים מרוכבים של  $k$  למערכת זו אין פתרון?

פתרון. כידוע, למערכת  $A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$  פתרון יחיד אם ורק אם

$$\det A \neq 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -k \\ k & 1 - k \end{bmatrix} = 2(1 - k) - (-k) \cdot k = k^2 - 2k + 2$$

$$k^2 - 2k + 2 = 0 \text{ אם ורק אם } k = 1 + i \text{ או } k = 1 - i.$$

לכן, למערכת פתרון יחיד אם ורק אם  $k \neq 1 + i$  וגם  $k \neq 1 - i$ . נעיר ש- $(1 - i)(1 + i) = 2$ .

$$\begin{cases} 2x - (1 + i)y = 2 \\ (1 + i)x + (-i)y = 1 + i \end{cases} \quad \text{כאשר } k = 1 + i \text{ מקבלים מערכת}$$

קל לראות שאם כופלים את המשוואה השנייה במספר  $(1 - i)$  מקבלים את

המשוואה הראשונה, לכן כאשר  $k = 1 + i$  למערכת אין סוף פתרונות

(משוואה אחת  $2x - (1 + i)y = 2$ , ממנה נובע  $x = 1 + \frac{(1+i)y}{2}$ , כלומר

$y$  הוא מספר מרוכב שרירותי ו- $x$  מתבטא באמצעותו כמו שכתבנו. היות ויש

אין סוף מספרים מרוכבים, יש אין סוף זוגות  $(x, y)$  כאלה.

כאשר  $k = 1 - i$  מקבלים מערכת  $\begin{cases} 2x - (1 - i)y = 2 \\ (1 - i)x + iy = 1 + i \end{cases}$   
 קל לראות שאם כופלים את המשוואה השנייה במספר  $(1 + i)$  מקבלים מערכת  
 $\begin{cases} 2x - (1 - i)y = 2 \\ 2x + (i - 1)y = (1 + i)^2 \end{cases}$  אם נחסר את המשוואה הראשונה  
 מהמשוואה השנייה נקבל שוויון  $0 = (1 + i)^2 - 2$ . זה שוויון שקר כי  
 $(1 + i)^2 - 2 = 1 + 2i - 1 + 2 = 2 + 2i \neq 0$ .  
 לכן, כאשר  $k = 1 - i$  למערכת אין פתרון.

**שאלה 2.** (25 נקודות) נתבונן בתת-מרחב הבא של  $\mathbb{R}^5$ :

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \right\}$$

א. (10 נקודות) מצאו את  $\dim W$ .

ב. (15 נקודות) נסמן:

$$\vec{a} = (1, -1, 1, 1, 2), \quad \vec{b} = (-1, -4, 2, 1, 2), \quad \vec{c} = (2, -7, 5, 4, 8)$$

$$U = \text{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

הוכיחו ש  $U$  מהווה תת-מרחב של  $W$ , אבל  $U \neq W$ .

פתרון. סעיף א'.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 5 & -1 & -2 & | & 0 \\ 2 & -4 & -8 & 4 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3]{L_2 - L_1 \rightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

כבר בשלב הזה רואים שהשורה השלישית אפשר לאפס (על ידי חיבורה עם  
 השורה השנייה), ובפתרון הכללי של המערכת המגדירה את  $W$  יהיו שלושה  
 פרמטרים חפשיים:  $x_1, x_2$  מבוטאים באמצעות  $x_3, x_4, x_5$  החפשיים.

מכאן המסקנה:  $\dim W = 3$ .

סעיף ב'. לפי אחד המשפטים שלמדנו (המשפט הזה מופיע בדפי חומר עזר שהיו  
 המצורפים לשאלון), אם נוכיח שהווקטורים  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  שייכים למרחב  $W$ , מזה מיד  
 ינבע ש- $U$  המהווה נפרש של  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  (זאת ההגדרה של  $U$ ) מהווה תת-מרחב  
 של  $W$ . כדי להראות ש- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  שייכים למרחב  $W$ , יש להראות שכל אחד  
 מהם מהווה פתרון למערכת המשוואות הלינאריות המגדירה את  $W$ .

כדי להראות זאת נציב את רכיבי  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  בשתי המשוואות הראשונות כי ראינו בסעיף א' שהמשוואה השלישית מיותרת (השורה השלישית התאפסה):  
 המשוואה השלישית מתקבלת על ידי חיסור של המשוואה השנייה מהמשוואה הראשונה המוכפלת בשלוש.  
 נראה ש- $\vec{a} \in W$ :

$$\begin{aligned} 1 - (-1) - 1 + 1 - 2 &= 0 \\ 1 + (-1) + 5 \cdot 1 - 1 - 2 \cdot 2 &= 0 \end{aligned}$$

בדרך דומה מראים ש- $\vec{b}, \vec{c}$  שייכים ל- $W$ .  
 כמו שאמרנו לעיל, היות ו- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  שייכים למרחב  $W$ , ניתן להסיק מכך ש- $U = \text{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  מהווה תת-מרחב ב- $W$ .  
 כעת אנו מתבקשים להוכיח ש- $U \neq W$ . כדי שהטענה הזאת תהיה נכונה חייב להתקיים אי-השוויון  $\dim U < \dim W$  (אחרת, אילו המימדים היו שווים, היה חייב להיות  $U = W$  – למדנו משפט כזה. האפשרות  $\dim U > \dim W$  לא קיימת במקרה שלנו כי כבר הוכחנו ש- $U$  מהווה תת-מרחב ב- $W$ ).  
 נמצא את  $\dim U$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -7 & 5 & 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3]{L_2 + L_1 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

כבר בשלב הזה רואים בקלות שבצורה מדורגת תהיינה בדיוק שתי שורות ששונות משורת אפסים (השורה השלישית תתאפס על ידי חיסור של השנייה ממנה).

לפי מה שלמדנו, מזה נובע ש- $\dim U = 2$ . נזכיר ש- $\dim W = 3$ .  
 היות ומימדים של  $U$  ו- $W$  שונים, בוודאי המרחבים עצמם גם שונים.

הערה. אם היינו מתחילים ממצאת המימד של  $U$ , היינו מבינים שהווקטור  $\vec{c}$  אינו תורם כלום ( $3\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ) ולכן  $U = \text{Span}(\vec{a}, \vec{b})$ . כעת, כדי להוכיח ש- $U$  מהווה תת-מרחב ב- $W$ , מספיק להראות ש- $\vec{a}, \vec{b}$  מהווים פתרונות למערכת המגדירה את  $W$  ואין צורך להתייחס ל- $\vec{c}$ .

**שאלה 3.** (25 נקודות) נתונה מטריצה  $A = \begin{bmatrix} k & 1 & 2 \\ k & 1 & 2 \\ k & 1 & 2 \end{bmatrix}$ , כאשר  $k$  הוא

מספר ממשי.

א. (10 נקודות) מצאו את כל הערכים העצמיים של  $A$  (הערכים העצמיים עשויים להיות תלויים ב- $k$ ).

ב. (15 נקודות) עבור אילו ערכים של  $k$  המטריצה  $A$  ניתנת ללכסון?

פתרון.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} k - \lambda & 1 & 2 \\ k & 1 - \lambda & 2 \\ k & 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = \\ &= (k - \lambda)((1 - \lambda)(2 - \lambda) - 2) - 1 \cdot (k(2 - \lambda) - 2k) \\ &\quad + 2(k - k(1 - \lambda)) = \lambda(k - \lambda)(\lambda - 3) + 3k\lambda = \\ &= \lambda(-\lambda^2 - 3k + k\lambda + 3\lambda + 3k) = \lambda^2(k + 3 - \lambda) \end{aligned}$$

חישבנו את הדטרמיננטה על פי ההגדרה – על ידי הפיתוח לפי השורה הראשונה. אפשר לחשב את  $\det(A - \lambda I)$  בדרך יותר קצרה ויותר יפה.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} k - \lambda & 1 & 2 \\ k & 1 - \lambda & 2 \\ k & 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} k + 3 - \lambda & 1 & 2 \\ k + 3 - \lambda & 1 - \lambda & 2 \\ k + 3 - \lambda & 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} k + 3 - \lambda & 1 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2(k + 3 - \lambda) \end{aligned}$$

כאן בשלב הראשון אנחנו חיברנו את העמודות השניה והשלישית לעמודה הראשונה ובשלב השני חיסרנו את השורה הראשונה מהשורה השניה ומהשורה השלישית.

כך או כך, אנחנו יודעים ש- $\lambda$  הוא ערך עצמי של  $A$  אם ורק אם  $\det(A - \lambda I) = 0$ , לכן הערכים העצמיים של  $A$  הם  $0$ ,  $k + 3$ . עד כאן – פתרנו את סעיף א'. כדי לפתור את עיף ב' יש להבחין בין שני מקרים:  $k \neq -3$  (ואז יש שני ערכים עצמיים שונים:

0 עם הריבוי האלגברי 2 ו- $k + 3$  עם ריבוי אלגברי 1),  
 ו- $k = -3$  (ואז יש ערך עצמי אחד בלבד והוא 0 והריבוי האלגברי שלו שווה לשלוש).

נמצא את הריבוי הגאומטרי של הערך העצמי 0.

$$(A - 0 \cdot I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ כלומר, } A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

במערכת זו יש משוואה אחת בלבד כתובה שלוש פעמים:

$$kx + y + 2z = 0. \text{ מכאן } y = -2z - kx, \text{ ולכן הווקטורים העצמיים}$$

$$\text{השייכים לערך עצמי 0 נראים כך: } \begin{bmatrix} x \\ -kx - 2z \\ z \end{bmatrix}. \text{ רואים שיש כאן שני}$$

פרמטרים חפשיים  $x, z$ , והרכיב השני  $y$  תלוי בהם.

נעיר שאין זה משנה כלל אם  $k$  שווה לאפס או שונה מאפס: בשני המקרים יש בדיוק שני וקטורים עצמיים של  $A$  השייכים לערך עצמי 0 בלתי תלויים

$$\text{לינארית, לדוגמה } \begin{bmatrix} 1 \\ -k \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

לכן הריבוי הגאומטרי של הערך העצמי 0 הוא 2, ללא כל תלות בערך של הפרמטר  $k$ .

מכאן, כאשר  $k \neq -3$  הריבוי האלגברי והריבוי הגאומטרי של הערך העצמי

0 שניהם שווים ל-2 (והריבוי האלגברי והגאומטרי של ערך עצמי  $k + 3$  שניהם שווים לאחד), ולכן כאשר  $k \neq -3$  המטריצה  $A$  ניתנת ללכסון.

אך כאשר  $k = -3$ , הריבוי הגאומטרי של הערך העצמי 0 הוא עדיין שווה

ל-2, אבל הריבוי האלגברי של ההערך העצמי 0 במקרה הזה שווה ל-3

(במקרה הזה 0 הוא הערך העצמי היחיד של המטריצה  $A$ ,

$$\text{כי } \det(A - \lambda I) = -\lambda^3.$$

לכן כאשר  $k = -3$ , המטריצה  $A$  אינה ניתנת ללכסון.

**שאלה 4.** (25 נקודות) נתון תת מרחב-וקטורי של  $\mathbb{R}^4$ :

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ a \\ b \\ b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

מצאו תת-מרחב וקטורי  $W$  המקיים:  $\dim W = 2$ ,  $\mathbb{R}^4 = U + W$ , פתרון. כידוע, אם  $U = \text{Span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ ,  $W = \text{Span}(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ , אז  $U + W = \text{Span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2)$ .

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ a \\ b \\ b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

עלינו להביא דוגמה של שני וקטורים בלתי תלויים לינארית  $\vec{w}_1, \vec{w}_2$  כך

$$\mathbb{R}^4 = \text{Span} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \right).$$

אז נגדיר:  $W = \text{Span}(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ , וזו תהיה התשובה שלנו. כמובן יש אין סוף אפשרויות לבחור  $\vec{w}_1, \vec{w}_2$  כאלה. הדרך הפשוטה היא לבנות מטריצה  $4 \times 4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & p \\ 1 & 0 & b & q \\ 0 & 1 & c & r \\ 0 & 1 & d & s \end{bmatrix}$$

כך שהדטרמיננטה שלה תהיה שונה מאפס – כי אז העמודות

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

שלה מהווהת בסיס ל- $\mathbb{R}^4$ . לדוגמה:

$$W = \text{Span} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

כלומר, תשובה:

העמודות הפורשות את  $W$  שאנחנו בחרנו – הן בלתי תלויות לינארית, ולכן  $\dim W = 2$ , ויחד עם שתי העמודות הפורשות את  $U$  הן פורשות את  $\mathbb{R}^4$ , ולכן  $\mathbb{R}^4 = U + W$ .

## שאלה 5. (25 נקודות)

נתונה מטריצה  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . מצאו מטריצות  $B$  ו  $C$  כך ש:

$$CA = 0 \text{ ו } B \neq 0, B \in M_{3 \times 3} \text{ ו } C \neq 0, C \in M_{3 \times 3} \text{ המקיימות משוואות } AB = 0$$

פתרון. אילו  $A$  היתה מטריצה הפיכה, ברור שמטריצות  $C, B$  כאלה לא היו

קיימות: אם נכפול את שני האגפים של השויון  $AB = 0$  בהפכית של  $A$

משמאל, נקבל  $B = 0$ ; אם נכפול את שני האגפים של השויון  $CA = 0$

בהפכית של  $A$  מימין, נקבל  $C = 0$ . אך, "למזלנו",  $A$  בלתי הפיכה.

העמודות של המכפלה  $AB$  הן מכפלות של  $A$  בעמודות של  $B$ , ואנחנו רוצים

שהעמודות של המכפלה  $AB$  תהינה כולן עמודות אפסים כאשר העמודות של  $B$

לא כולן עמודות אפסים. נמצא עמודה  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  כך

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ -ש. יש לנו מערכת לינארית הומוגנית פשוטה}$$

$$\text{מאד: } \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \text{ מכאן: } x = 2z, y = -2z, z = z \text{ שרירותי (חפשי).}$$

$$\text{נציב } x = 1 \text{ ונקבל: } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ כעת נגדיר את המטריצה } B \text{ כך:}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ רואים ש-} B \text{ היא לא מטריצת האפס. עם זאת, מתקיים}$$

$$AB = 0$$

השורות של המכפלה  $CA$  הן מכפלות של השורות של המטריצה  $C$  ב- $A$ . אנחנו

רוצים שכל השורות של  $CA$  תהיינה שורות אפסים. נמצא שורה  $[x \ y \ z]$

$$\text{כך ש-} [x \ y \ z] \cdot A = [0 \ 0 \ 0], [x \ y \ z] \neq [0 \ 0 \ 0]$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \text{ מקבלים מערכת לינארית הומוגנית פשוטה מאד:}$$

מכאן:  $x, y = -2x, z = x$  שרירותי (חפשי).

נציב  $x = 1$  ונקבל:  $[x \ y \ z] = [1 \ -2 \ 1]$ .

כעת נגדיר את המטריצה  $C$  כך:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ רואים ש-} C \text{ היא לא מטריצת האפס. עם זאת, מתקיים}$$

השוויון  $CA = 0$ .