1. נתונה המערכת

$$\begin{cases} ax - y + bz = 1 \\ ax + y - bz = -1 \\ x - ay + bz = 1 \end{cases}$$

נדרג את המט׳

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & b & 1 \\ a & 1 & -b & -1 \\ 1 & -a & b & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 : R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & -b & -1 \\ 1 & -a & b & 1 \end{array}\right)$$

עבור $a=0$ נקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & -1 \\ 1 & 0 & b & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

לכן לכל ערך $b \in \mathbb{R}$

(סעיף ב) למע׳ יש אינסוף פתרונות עבור $a=0$.

עבור $a \neq 0$ נבצע $R_1 : \frac{1}{2a} R_1$ ונקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & -b & -1 \\ 1 & -a & b & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 : R_3 - R_1]{R_2 : R_2 - aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & -1 \\ 0 & -a & b & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 : R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & -1 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \end{array}\right)$$

עבור $1-a=0 \Leftarrow a=1$ למע׳ יש ∞ פתרונות (סעיף ב)
וזאת עבור כל $b \in \mathbb{R}$.

עבור $a \neq 1$ יש לבדוק את ערכו של b:
נשים לב כי עבור $b=0$ נקבל שורת סתירה
לכן לא יהיה פתרון למערכת.

(סעיף א) לכן עבור $a \neq 1$ וגם $b \neq 0$ למערכת יהיה פתרון יחיד.

(סעיף ג) עבור $a \neq 1$ וגם $b=0$ לא יהיה פתרון למערכת.
לדוגמא: לא יהיה פתרון למע׳ כאשר $a=2$, $b=0$.

2. נתון תת מרחב של $\mathbb{R}^4$ באופן הבא:

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{matrix}x_1+2x_2+x_3=0\\-x_1-x_2+3x_4=0\end{matrix}\right\}$$

א. נמצא בסיס ומימד:

נעשה זאת ע"י פתרון המע' ההומו'

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&0&0\\-1&-1&0&3&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2:R_2+R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&0&0\\0&1&1&3&0\end{array}\right)$$

$$\boxed{x_2=-p-3t}\Leftarrow x_2+p+3t=0\Leftarrow\boxed{x_3=p}\,,\ \boxed{x_4=t}$$

$$\boxed{x_1=p+6t}\Leftarrow x_1-2p-6t+p=0\Leftarrow x_1+2(-p-3t)+p=0$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+6t\\-p-3t\\p\\t\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}6\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$$

לכן הבסיס של W הוא $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

ומימדו $\dim W=2$.

ב. נסמן $\vec{b}=(3,-2,-2,0)$ $\vec{a}=(2,0,1,1)$ $U=\mathrm{span}(\vec{a},\vec{b})$

נמצא תחילה $\dim(U+W)$ ע"י מציאת בסיס ל $U+W$:

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\6&-3&0&1\\2&0&1&1\\3&-2&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_3:R_3-2R_1\\R_4:R_4-3R_1}]{R_2:R_2-6R_1}\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&3&-6&1\\0&2&-1&1\\0&1&-5&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_4}\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&-5&0\\0&2&-1&1\\0&3&-6&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4:R_4-3R_2]{R_3:R_3-2R_2}\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&-5&0\\0&0&9&1\\0&0&9&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4:R_4-R_3}\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&-5&0\\0&0&9&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-5\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\9\\1\end{pmatrix}\right\}$$ לכן הבסיס של $U+W$ הוא

המימד הוא $\dim(U+W)=3$

ממשפט המימדים נקבל

$$\underbrace{\dim(U+W)}_{\substack{=\\3\\\text{פתרנו כעת}}}=\underbrace{\dim U}_{\substack{=\\2\\\text{כיוון שיש 2 וקטורים שאינם כפולה אחת של השני לכן בת"ל}}}+\underbrace{\dim W}_{\substack{=\\2\\\text{מסעיף א'}}}-\dim(U\cap W)$$

$\Leftarrow$ $\underline{\underline{\dim(U\cap W)=1}}$

2. נמצא וקטור $\vec{u}$ אורתוגונלי לכל וקטורי W

די אורתוגונלי לוקטורי הבסיס של W:

נסמן $\vec{u}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ לכן נדרוש

$$\left\langle\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle=0 \ \overset{\text{וגם}}{\wedge}\ \left\langle\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle=0$$

$$\begin{cases}a-b+c=0\\6a-3b+d=0\end{cases}\quad\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&0&0\\6&-3&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2:R_2-6R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&0&0\\0&3&-6&1&0\end{array}\right)$$

$\boxed{x_1=p-\frac{1}{3}t}\Leftarrow\boxed{x_2=2p-\frac{1}{3}t}\Leftarrow 3x_2-6p+t=0\quad\boxed{x_3=p}\quad\boxed{x_4=t}$

$\Leftarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-3\end{pmatrix}$ קבוצת הוקטורים האורתוגונליים לכל וקטורי W

למשל $\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-3\end{pmatrix}$ עבור $p=t=1$

3.

$$V = span(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

$$\vec{a} = (1,1,1,1) \quad \vec{b} = (2,2,2,3) \quad \vec{c} = (1,1,2,-1)$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \quad x_1 = x_2 = 0 \right\}$$

א. נמצא את הבסיס של V ובאמצעותו נמצא את המימד $\dim V$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 : R_3 - R_1]{R_2 : R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

לכן הבסיס של V הוא

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{מימד} \quad \dim V = 3$$

ב. נוכיח כי W מהווה תת מרחב של V ע"י כך שתחילה נבחן מהם הוקטורים השייכים ל W:

יהי $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in W$ לכן $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

כמו כן $\vec{w} \in V$ לכן $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ p \\ t \\ q - 2t \end{pmatrix} \Rightarrow p = 0 \Rightarrow \vec{w} = q\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שכל וקטור $\vec{w} \in W$ הינו צירוף לינארי של הוקטורים $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ לכן $W = span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

לכן W תת מרחב וקטורי של V.

ג. הבסיס של W כפי שראינו בסעיף ב' הוא $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

זאת כיוון שהוקטורים בת"ל וגם פורשים את W.

4. נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad k\in\mathbb{R}$

א. נמצא את כל הערכים העצמיים של A:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ k & 1-\lambda & 0 \\ 5 & k-2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(1-\lambda)^2=0$$

לכן הערכים העצמיים הם

$\lambda_{1,2}=1$ מריבוי 2

$\lambda_3=2$ מריבוי 1

ב. נבדוק עבור אילו ערכים עצמיים המטריצה ניתנת ללכסון: לשם כך לכל ערך עצמי נבדוק האם הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי:

$\underline{\lambda_{1,2}=1}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 5 & k-2 & 0 & 0 \end{array}\right)$

עבור $k\neq 2$ $\text{rank}A=2$ ולכן $n-\text{rank}A=1$
$3-2$
לכן מימד הפתרונות יהיה 1
לכן הריבוי הגיאומטרי יהיה 1

עבור $k=2$ $\text{rank}A=1$ ולכן $n-\text{rank}A=2$
לכן מימד מרחב הפתרונות הוא ~~הריבוי~~ הגיאומטרי יהיה 2.

$\underline{\lambda_3=2}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & -1 & 0 & 0 \\ 5 & k-2 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$

$x_1=t \Rightarrow x_2=kt$

$5t+(k-2)kt-x_3=0$

$\Rightarrow x_3=t(k^2-2k+5)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k^2-2k+5 \end{pmatrix}$$

לכל $k\in\mathbb{R}$ ריבוי גיאומטרי 1.

סה"כ קיבלנו שעבור $k=2$ לכל ערך עצמי הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי ולכן המטריצה ניתנת ללכסון עבור $k=2$.

5. נתון: $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -1+i$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+i \\ 3-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

נחשב את $\begin{vmatrix} p & c \\ q & d \end{vmatrix}$

פתרון:

עבור מט' A_2 המקיימת את המשו'

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

ידוע כי

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

לכן במקרה שלנו מתקיים:

$$2+i = \frac{\begin{vmatrix} p & c \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} \Rightarrow 2+i = \frac{\begin{vmatrix} p & c \\ q & d \end{vmatrix}}{-1+i}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} p & c \\ q & d \end{vmatrix} = (2+i)(-1+i) = -2+2i-i-1 = \underline{\underline{-3+i}}$$

$$\begin{vmatrix} p & c \\ q & d \end{vmatrix} = -3+i \quad \Leftarrow$$