

פתרון מס' 1

1. מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציות הבאות בקטעים הנתונים.

א. $y = \frac{2x-1}{x^2+2}$ $[0,3]$

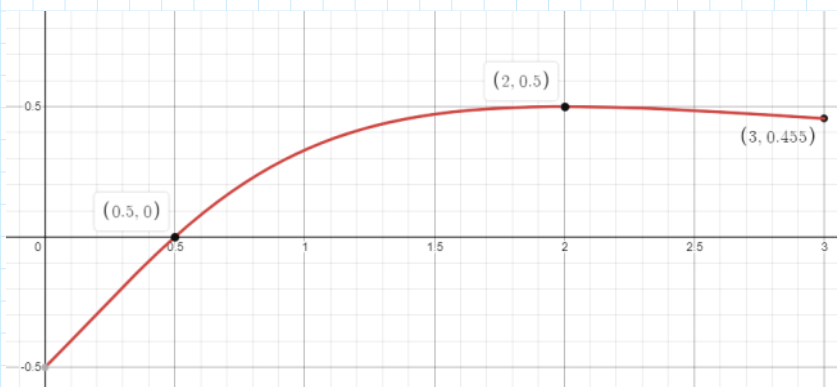
ב. $y = \frac{x^2-4x+4}{e^x}$ $[3,6]$

ג. $y = x^2 e^{-x^2}$ $[-2,4]$

ד. $y = x \ln x$ $[\frac{1}{4}, e]$

א) $y' = \frac{2(x^2+2) - (2x-1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-2x^2+2x+4}{(x^2+2)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow -2x^2+2x+4 = 0 \Leftrightarrow x^2-x-2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2}$



$x_1 = -1, x_2 = 2$

נ' ב' $x=2$ נקודה קיצונית $[0,3]$

$f(0) = -0.5 \Rightarrow$ נקודה קיצונית

$f(2) = 0.5 \Rightarrow$ נקודה קיצונית

$f(3) = 0.455$

ב) $y = \frac{x^2-4x+4}{e^x} = \frac{(x-2)^2}{e^x}$ $3 \leq x \leq 6$

$\Rightarrow y' = \frac{2(x-2)e^x - (x-2)^2 e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(x-2)[2-(x-2)]}{e^{2x}} = \frac{(x-2)(4-x)}{e^x}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = 4 \Rightarrow [3,6]$ נקודה קיצונית $x=4$ נ' ב' p

$f(3) \approx 0.05$

$f(4) \approx 0.07 \Rightarrow$ נקודה קיצונית

$f(6) \approx 0.04 \Rightarrow$ נקודה קיצונית

ג) $y = x^2 e^{-x^2}$ $-2 \leq x \leq 4$

$\Rightarrow y' = 2x e^{-x^2} + x^2 e^{-x^2} (-2x) = 2x e^{-x^2} (1-x^2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x(1-x)(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 0, 1$

$f(-2) \approx 0.073 \Rightarrow$ נקודה קיצונית

$$f(-2) \approx 0.073 \Rightarrow \text{מקסימום ממוצע}$$

$$f(-1) \approx 0.37$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) \approx 0.37 \Rightarrow \text{מקסימום ממוצע}$$

$$f(4) \approx 0.000002 \Rightarrow \text{מינימום ממוצע}$$

$$③ \quad y = x \ln(x) \quad \left[\frac{1}{4}, e\right]$$

$$y' = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \approx 0.368$$

$$y\left(\frac{1}{4}\right) \approx -0.346$$

$$y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \approx -0.368 \Rightarrow \text{מינימום ממוצע}$$

$$y(e) = e \approx 2.718 \Rightarrow \text{מקסימום ממוצע}$$

2.

סוחר מוכר כל שבוע 30 מוצרים במחיר של 200 שקלים למוצר. על כל 5 שקלים שהסוחר מוריד ממחיר

המוצר הוא מוכר מוצר אחד יותר לשבוע. מה צריך להיות מחיר המוצר כדי שהכנסתו השבועית תהיה

מקסימאלית?

$$0 \leq x \leq \frac{200}{5} = 40$$

$$x = \text{מספר המוצרים הנמכרים}$$

$$f(x) = (30+x)(200-5x) = -5x^2 + 50x + 6000 = \text{הכנסה}$$

$$f'(x) = -10x + 50 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$f(0) = 6000$$

$$f(5) = 6125 \Rightarrow$$

מקסימום ממוצע

$$f(40) = 0$$

ההכנסה היא מקסימלית כאשר המחיר הנמוך הוא 175.

3.

אם במסעדה יוקרתית סועדת קבוצה של 20 אנשים, אז כל אחד מהם משלם סכום של 150 ₪. בעלי

המסעדה הכריזו על מבצע, לפיו עבור כל אדם נוסף, שמצטרף לקבוצה זו, משלם כל אחד מהסועדים 5 ₪

פחות.

א. מצא כמה אנשים צריכים להצטרף לקבוצה הזו כדי שלמסעדה תהיה הכנסה מקסימאלית.

ב. מצא כמה כסף ישלם כל אחד מהסועדים, ומה תהיה הכנסתה של מסעדה מקבוצה זו במקרה הנ"ל.

$$0 \leq x \leq \frac{150}{5} = 30$$

$$x = \text{כמות האנשים הנוספים}$$

$$f(x) = (20+x) \cdot (150-5x) = -5x^2 + 70x + 3000 = \text{הכנסה}$$

פתרון: $x = \text{כמות האנשים הראשון}$
 $0 \leq x \leq \frac{300}{5} = 30$
 הפנסה $=$
 $f(x) = (20+x) \cdot (150-5x) = -5x^2 + 50x + 3000$
 $f'(x) = -10x + 50 = 0 \Leftrightarrow x = 5$
 $f(0) = 3000$
 $f(5) = 3125$
 $f(30) = 0$

(כ) 5 אנשים.
 (ג) בסוף יום 125. הפנסה המעולה תהיה 3125 ל"א.

4.

חברת תיור מציעה חבילת נופש לוועדי עובדים של מפעלים גדולים. לקבוצה של 30 מטיילים המחיר הוא 2000 ש"ח למטייל ועל כל מטייל נוסף המצטרף לקבוצה, החברה מוזילה את מחיר הטיול ב-50 ש"ח למטייל. מה צריך להיות מספר המטיילים בקבוצה, כדי שלחברת התיור תהיה הכנסה מקסימאלית? מצא גם מהי ההכנסה המקסימאלית הזו.

פתרון: $x = \text{מספר המטיילים הראשון}$
 $0 \leq x \leq \frac{2000}{50} = 40$
 הפנסה $=$
 $f(x) = (30+x) \cdot (2000-50x) = -50x^2 + 5850x + 60000$
 $f'(x) = -100x + 5850 = 0 \Leftrightarrow x = 58.5$
 הקצה $x = 58.5$ אינה בתוך $[0, 40]$ ולכן אינה הלוואי.
 $f(0) = 60,000 \Rightarrow$ להפסד מוחלט.
 $f(40) = 0$
 כסף וא' המטיילים הא' 30, הפנסה היא להפסד: 60,000 ל"א.

5.

כאשר מחיר שיחת טלפון אחת הוא שקל אחד מספר השיחות הממוצע ליום הוא 20. על כל 10 אגורות שמעלים את מחיר השיחה יורד מספר השיחות הממוצע ליום ב-1.
 א. מצא מה צריך להיות מחיר שיחה אחת כדי שההכנסה תהיה מקסימאלית.
 ב. מהי ההכנסה המקסימאלית ליום?

פתרון: $x = \text{מ' השיחות ש'רז בממוצע ליום}$
 $0 \leq x \leq 20$
 הפנסה $=$
 $f(x) = (20-x) \cdot (1+0.1x) = -0.1x^2 + x + 20$
 $f'(x) = -0.2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 5$
 $f(0) = 20$

$$f(15) = 22.5 \Rightarrow$$

$$f(20) = 0$$

GSIN origin

NE 1.5 (K)

NE 22.5 (K)