

## מבחן במתמטיקה לכלכלנים א'

מרצים: ד"ר יהודה אשכנזי, ד"ר אליעזר הירשברג, ד"ר אלכסנדר קופלנובסקי וגב' הדר שפיגל.  
תשע"ה סמסטר א' מועד א'  
זמן: שעתיים וחצי.  
חומר עזר: מחשבון ודף נוסחאות מצורף.

**חלק א'. פתור את השאלה הבאה (שאלת חובה, 20 נקודות).**

### שאלה מספר 1. (חובה)

חקור את הפונקציה הבאה על פי הקריטריונים הבאים ושרטט את גרף הפונקציה: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול, אסימפטוטות אנכיות ואסימפטוטות משופעות.

$$y = x^2 \ln x$$

**חלק ב'. פתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות.** לכל שאלה 20 נקודות.  
*חובה צ'יין צ'י אבי כריכת מחברת הבחינה את מספרי השאלות שנבחרו.*

### שאלה מספר 2.

פתור השאלות הבאות:

א. מצא את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות של הפונקציה  $y = \frac{\ln(6x)}{x}$ .

ב. מצא את תחומי הקמירות והקעירות ואת נקודות הפיתול של הפונקציה

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

### שאלה מספר 3.

חשב שנים מבין שלושת הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x+1}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} \quad \text{א.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot e^{-\frac{3}{x}} \quad \text{ב.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x} \quad \text{ג.}$$

### שאלה מספר 4.

נתונה הפונקציה  $y = x \ln x$ . מצא את הנקודה על גרף הפונקציה בה המשיק לגרף הפונקציה הינו בעל שיפוע 2.

### שאלה מספר 5.

בטיסה המחיר לכל נוסע הוא 1000 דולר במידה ומספר הנוסעים הוא בדיוק 100. אם יש פחות מ-100 נוסעים הטיסה מתבטלת. במטוס 250 מקומות. לכל נוסע נוסף (מעל ה-100) שנרשם לטיסה, יורד המחיר של כל אחד מהנוסעים ב-4 דולר (למשל: אם נרשמו 101 נוסעים העלות לכל נוסע היא  $1000 - 4 = 996$  דולר, אם נרשמו 102 נוסעים העלות לכל נוסע היא  $1000 - 8 = 992$  דולר וכו'). מה צריך להיות מספר הנוסעים כדי לקבל הכנסה מקסימאלית?

### שאלה מספר 6.

מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה  $f(x) = (3x-9)\sqrt{x^2}$  בקטע הסגור  $-1 \leq x \leq 8$ .

**מה 3fחה!**

①  $y = x^2 \ln x$

1)  $x > 0$

2)  $(1, 0)$

3-4)  $y' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$

$y' = 0: x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}, y = -\frac{1}{2e}$

5)  $y'' = 2 \ln x + 2 + 1 = 2 \ln x + 3$

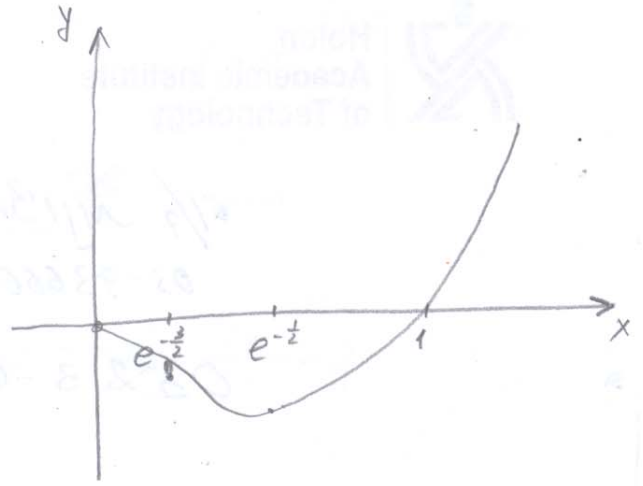
$y''(e^{-\frac{1}{2}}) = -1 + 3 = 2 > 0$  min

$\rightarrow 0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$

$\rightarrow x > \frac{1}{\sqrt{e}}$  min.  $(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e})$   
0.606, -0.18

5-6)  $y'' = 0 \quad x = e^{-\frac{3}{2}} = 0.223$   
 $y = -\frac{3}{2} \cdot e^{-3} = -0.074$   $\delta$  נ"כ

קמורה  $\cup \quad x < e^{-\frac{3}{2}}$   
קעורה  $\cap \quad x > e^{-\frac{3}{2}}$



7)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{l}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-2x^2) = 0$

נ"כ / ל'טוב

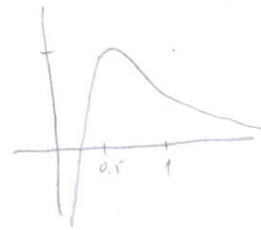
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \ln x}{x} = \infty$  נ"כ / ל'טוב

②  $y = \frac{\ln(6x)}{x} \quad x > 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(6x)}{x} = -\infty$  נ"כ / ל'טוב  $x=0$

m =  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(6x)}{x \cdot x} \stackrel{l}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{x}}{2x} = 0$

n =  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(6x)}{x} \stackrel{l}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{x}}{1} = 0$   $y=0$  נ"כ / ל'טוב



②③  $y = e^{\frac{1}{x}}$

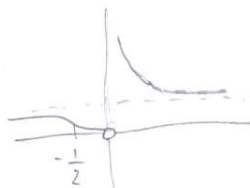
$y' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

$y'' = -\frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \cdot x^2 - 2x e^{\frac{1}{x}}}{x^4} = \frac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4}$

$x = -\frac{1}{2} \quad y = e^{-2}$   $\delta$  נ"כ

$x < -\frac{1}{2} \quad y'' < 0 \rightarrow$  קמורה

$x > -\frac{1}{2} \quad y'' > 0 \rightarrow$  קעורה



$$\textcircled{10} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x+1}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{-x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{2x+1}} = e^{-1}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot e^{-\frac{3}{x}} \stackrel{x = \frac{1}{t}}{=} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3t}}{t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-3e^{-3t}}{1} = -\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x - x^2+2x}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{2x} = 2$$

$$\textcircled{4} \quad y = x \ln x \quad y' = \ln x + 1$$

$$y' = 2 \quad \ln x + 1 = 2 \quad x = e^1, y = e$$

$$\textcircled{5} \quad y = [1000 - 4(x-100)] \cdot x$$

$$y = 1000x + 400x - 4x^2 = -4x^2 + 1400x$$

$$y' = -8x + 1400 \quad x = 175$$

$$\textcircled{6} \quad y = (3x-9)\sqrt[3]{x^2} = 3x^{\frac{5}{3}} - 9x^{\frac{2}{3}} \quad -1 \leq x \leq 8$$

$$y' = 3 \cdot \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} - 9 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{15x - 6}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$$x = \frac{6}{5}$$

$$f(-1) = -12 \sqrt[3]{1} = -12 \quad (\text{min})$$

$$f\left(\frac{6}{5}\right) = \left(3 \cdot \frac{6}{5} - 9\right) \sqrt[3]{\frac{6^2}{5^2}} = -6.09$$

$$f(8) = (3 \cdot 8 - 9) \sqrt[3]{8^2} = 60$$

$$f(0) = 0$$

