

נגזרות מסדר גבוה.
נגזרת של פונקציה סתומה .

I. חשב את הנגזרת השנייה של $y(x)$ בנקודה $x = -1$:

$$1) y = 7x^4 - 3x^2 + x \quad 2) y = \ln(x^2 + 1) \quad 3) y = \frac{x+1}{x}$$

$$4) y = (x^3 - 5)(2x + 3) \quad 5) y = xe^{x^2}$$

תשובות: $1) y'' = 84x^2 - 6, y''(-1) = 78$ $2) y'' = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}, y''(-1) = 0$

$$3) y'' = \frac{2}{x^3}; y''(-1) = -2;$$

$$4) y'' = 24x^2 + 18x, y''(-1) = 6$$

$$5) y'' = 2xe^{x^2} (2x^2 + 3), y''(-1) = -10e$$

II. חשב את את הנגזרת השלישית של $y(x)$ בנקודה $x = 0$:

$$1) y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad 2) y = \sqrt{x^2 + 1} \quad 3) y = e^x(x^2 + x + 3)$$

תשובות: $1) y''' = 6a_3$ $2) y''' = \frac{-3x}{\sqrt{(x^2+1)^5}}, y'''(0) = 0$

$$3) y''' = e^x(x^2 + 7x + 12), y'''(0) = 12$$

III. חשב את הנגזרת $\frac{dy}{dx}$ כאשר $y(x)$ נתונה בצורה סתומה .

בטא את הנגזרת כפונקציה של x, y .

$$1) x - y + \ln y = 0 \quad 2) y^2 = 2px, \text{ קבוע } -p \quad 3) x^2 + y^4 - y = 2$$

תשובות: $1) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-1}$ $2) \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$ $3) \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1-4y^3}$

IV. נתונה המשוואה $F(x, y) = 0$ שמגדירה עקומה במישור והנקודה (x_0, y_0) .

הראה כי העקומה עוברת דרך (x_0, y_0) ומצא את משוואת המשיק לעקומה ב- (x_0, y_0)

$$1) e^{xy} + x^2y^2 - 4x + 3 = 0, \quad x_0 = 1, y_0 = 0$$

$$2) \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \quad x_0 = 25, y_0 = 9$$

$$3) x^2 + y^2 - 8ax = 0, \quad a > 0, \quad x_0 = \frac{8a}{5}, y_0 = \frac{16a}{5}$$

תשובות: $1) y = 4(x - 1)$ $2) y - 9 = -\frac{3}{5}(x - 25)$

$$3) y - \frac{16a}{5} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{8}{5}\right)$$

הכלל של לופיטל

חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{3x^2 + x - 14} \quad .2 \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{5x^2 + 3x - 8} \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16} \quad .4 \qquad (a > 0), \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} \quad .3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x} \quad .6 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{5x} \quad .5$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - \sqrt{3 + 2x}}{\sqrt{x + 2} - 1} \quad .8 \qquad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{5 + 2x}}{x^2 - 4} \quad .7$$

$$(n > 0), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \quad .10 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 1)}{x^2} \quad .9$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \ln x - 1}{e^x - e} \quad .12 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln x}{x \ln x} \quad .11$$

$$(n > 0, k > 0), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{kx}}{x^n} \quad .14 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad .13$$

$$(n > 0), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} \quad .16 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} \quad .15$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x \quad .18 \qquad (n > 0), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x \quad .17$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad .20 \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \quad .19$$

תשובות :

- 0.10 2.9 -2 .8 $-\frac{1}{12}$.7 2.6 0.6ln2 .5 $\frac{16}{13}$.4 $\frac{m}{n} a^{m-n}$.3 0 .2 $\frac{4}{13}$.1
0.20 $\frac{1}{2}$.19 0.18 0.17 0.16 0.15 ∞ .14 -1.13 $\frac{3}{e}$.12 0 .11

חקירת פונקציות בעזרת הנגזרת

I. מצא את תחומי העלייה והירידה ונקודות קיצון מקומי של הפונקציות הבאות .
חשב את ערך של הפונקציה בנקודות הקיצון .

1. $y = -2x^3 - 9x^2 + 60x$ 2. $y = 4x^4 + 2x - 5$

3. $y = \frac{x^2+1}{x}$ 4. $y = \frac{(x+1)^3}{x^3}$ 5. $y = x \cdot e^x$ 6. $y = \ln|x-1|$

II. מצא את אסימפטוטות אנכיות (אם הן קיימות) לגרפים של הפונקציות הבאות :

1. $y = \frac{x^2+1}{x}$ 2. $y = \frac{4+x}{x-3}$ 3. $y = \sqrt{4-x^2}$ 4. $y = \ln(x^2-1)$

III. מצא את אסימפטוטות משופעות (אם הן קיימות) לגרפים של הפונקציות הבאות :

1. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ 2. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ 3. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ 4. $y = \sqrt{(x-2)^3}$

IV. מצא את כל אסימפטוטות (אם הן קיימות) לגרפים של הפונקציות הבאות :

1. $y = \frac{x^2+1}{x}$ 2. $y = \frac{x^2+x-1}{2x+1}$ 3. $y = \frac{x^2+1}{x}$
4. $y = \frac{(x+1)^3}{x^3}$ 5. $y = \sqrt{x^2+15}$ 6. $y = \frac{x^5}{2-x^4}$

תשובות

I. 1. $y(x)$ עולה כאשר $x > 2$, $x < -5$, יורדת כאשר $-5 < x < 2$
 $x = 2$ נקודת מינימום מקומי, $x = -5$ נקודת מקסימום מקומי,
 $y(2) = 100$ $y(-5) = -275$

2. $y(x)$ עולה כאשר $x < -\frac{1}{2}$, יורדת כאשר $-\frac{1}{2} < x$

$x = -\frac{1}{2}$ נקודת מקסימום מקומי $y(-\frac{1}{2}) = -\frac{23}{4}$

3. $y(x)$ עולה כאשר $x > 1$, $x < -1$, יורדת כאשר $0 < x < 1$, $-1 < x < 0$
 $x = 1$ נקודת מינימום מקומי, $x = -1$ נקודת מקסימום מקומי,
 $y(1) = 2$ $y(-1) = -2$

4. $y(x)$ יורדת כאשר $x \neq 0$

5. $y(x)$ עולה כאשר $x > 1$, יורדת כאשר $x < 1$

$x = -1$ נקודת מינימום מקומי, $y(-1) = -\frac{1}{e}$

6. $y(x)$ עולה כאשר $x > -1$, יורדת כאשר $x < -1$, לא קיימת ב-
 $x = -1$ אין נקודות קיצון של $y(x)$

II. 1. $x = 0$ 2. $x = 3$ 3. לא קיימת 4. $x = 1$, $x = -1$

III. 1. $y = \frac{1}{2}x - 1$ 2. $y = 1$ 3. $y = 1$ 4. לא קיימת

IV. 1. $x = 0, y = x$ 2. $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ 3. $y = x, y = -x$

4. $x = \sqrt[4]{2}, y = -x$

חקירת פונקציות בעזרת הנגזרות

I. מצא את תחומי קמירות ואת נקודות פיתול של הפונקציות הבאות :

1. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$ 2. $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$

3. $y = 2x^2 + \frac{4}{x}$ 4. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ 5. $y = \frac{x^2}{e^x}$

6. $y = x^2 e^x$ 7. $y = \ln \frac{x}{x-1}$ 8. $y = \ln(1+x^2)$

תשובות :

1. $y(x)$ קמורה כלפי מעלה, כאשר $x > 3$, $y(x)$ קמורה כלפי מטה, כאשר $x < 3$.
נקודת פיתול. $x = 3$.
2. $y(x)$ קמורה כלפי מעלה, כאשר $x > 1$, $y(x)$ קמורה כלפי מטה, כאשר $x < 1$.
נקודת פיתול. $x = 1$.
3. $y(x)$ קמורה כלפי מעלה, כאשר $x > 0$, $y(x)$ קמורה כלפי מטה,
כאשר $-\sqrt[3]{2} < x < 0$. נקודת פיתול. $x = -\sqrt[3]{2}$.
4. $y(x)$ קמורה כלפי מעלה, כאשר $x > \sqrt{3}$, $y(x)$ קמורה כלפי מטה,
כאשר $-\sqrt{3} < x < 0$, $x = \sqrt{3}$, $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ נקודות פיתול.
5. $y(x)$ קמורה כלפי מעלה, כאשר $x > 2 + \sqrt{2}$, $y(x)$ קמורה כלפי מטה,
כאשר $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$. נקודות פיתול. $x = 2 - \sqrt{2}$, $x = 2 + \sqrt{2}$.
6. $y(x)$ קמורה כלפי מעלה, כאשר $x > -2 + \sqrt{2}$, $y(x)$ קמורה כלפי מטה,
כאשר $-2 - \sqrt{2} < x < -2 + \sqrt{2}$. נקודות פיתול. $x = -2 - \sqrt{2}$, $x = -2 + \sqrt{2}$.
7. $y(x)$ קמורה כלפי מעלה, כאשר $x > \frac{1}{2}$, $x \neq 1$, $y(x)$ קמורה כלפי מטה,
כאשר $x < \frac{1}{2}$, $x \neq 0$. נקודת פיתול. $x = \frac{1}{2}$.
8. $y(x)$ קמורה כלפי מעלה, כאשר $-1 < x < 1$, $y(x)$ קמורה כלפי מטה,
כאשר $x < -1$, $x > 1$. נקודות פיתול. $x = \pm 1$, $x = \ln 2$.

II. חקור את הפונקציות הבאות (חקירה מלאה) ושרטט את גרף של הפונקציה.

1. $y = \frac{1}{1-x^2}$ 2. $y = \frac{x^2}{x+2}$ 3. $y = \frac{e^x}{x^2}$ 4. $y = \frac{x}{\ln x}$

חקירת פונקציות בעזרת הנגזרות

I. מצא את תחומי קמירות ואת נקודות פיתול של הפונקציות הבאות :

1. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$ 2. $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$

3. $y = 2x^2 + \frac{4}{x}$ 4. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ 5. $y = \frac{x^2}{e^x}$

6. $y = x^2 e^x$ 7. $y = \ln \frac{x}{x-1}$ 8. $y = \ln(1+x^2)$

תשובות :

1. $y(x)$ קמורה כלפי מעלה, כאשר $x > 3$, $y(x)$ קמורה כלפי מטה, כאשר $x < 3$.
נקודת פיתול. $x = 3$.
2. $y(x)$ קמורה כלפי מעלה, כאשר $x > 1$, $y(x)$ קמורה כלפי מטה, כאשר $x < 1$.
נקודת פיתול. $x = 1$.
3. $y(x)$ קמורה כלפי מעלה, כאשר $x > 0$, $y(x)$ קמורה כלפי מטה,
כאשר $-\sqrt[3]{2} < x < 0$. נקודת פיתול. $x = -\sqrt[3]{2}$.
4. $y(x)$ קמורה כלפי מעלה, כאשר $x > \sqrt{3}$, $y(x)$ קמורה כלפי מטה,
כאשר $-\sqrt{3} < x < 0$, $x = \sqrt{3}$, $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ נקודות פיתול.
5. $y(x)$ קמורה כלפי מעלה, כאשר $x > 2 + \sqrt{2}$, $y(x)$ קמורה כלפי מטה,
כאשר $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$. נקודות פיתול. $x = 2 - \sqrt{2}$, $x = 2 + \sqrt{2}$.
6. $y(x)$ קמורה כלפי מעלה, כאשר $x > -2 + \sqrt{2}$, $y(x)$ קמורה כלפי מטה,
כאשר $-2 - \sqrt{2} < x < -2 + \sqrt{2}$. נקודות פיתול. $x = -2 - \sqrt{2}$, $x = -2 + \sqrt{2}$.
7. $y(x)$ קמורה כלפי מעלה, כאשר $x > \frac{1}{2}$, $x \neq 1$, $y(x)$ קמורה כלפי מטה,
כאשר $x < \frac{1}{2}$, $x \neq 0$. נקודת פיתול. $x = \frac{1}{2}$.
8. $y(x)$ קמורה כלפי מעלה, כאשר $-1 < x < 1$, $y(x)$ קמורה כלפי מטה,
כאשר $x < -1$, $x > 1$. נקודות פיתול. $x = \pm 1$, $x = \ln 2$.

II. חקור את הפונקציות הבאות (חקירה מלאה) ושרטט את גרף של הפונקציה.

1. $y = \frac{1}{1-x^2}$ 2. $y = \frac{x^2}{x+2}$ 3. $y = \frac{e^x}{x^2}$ 4. $y = \frac{x}{\ln x}$

מינימום ומקסימום מוחלטים

I. מצא את מינימום ואת מקסימום של הפונקציות הבאות בתחום הנתון :

1. $y = \frac{x^2}{x-2}$, $[3,5]$. 2. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ $[-4,4]$

3. $y = x^2 \ln x$ $[1,e]$. 4. $y = x^2 e^{-x}$ $[-1,1]$

5. $y = x - 2 \ln x$ $[1,e]$. 6. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & 0 \leq x < 1 \\ 3x, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

תשובות: 1. $y_{\max} = 9, y_{\min} = 8$. 2. $y_{\max} = 40, y_{\min} = -41$. 3. $y_{\max} = e^2, y_{\min} = 0$. 4. $y_{\max} = e, y_{\min} = 0$. 5. $y_{\max} = 8, y_{\min} = 0$. 6. $y_{\max} = 1, y_{\min} = 0.6$

II. 1. מצא את שני מספרים שסכומם 10 ומכפלתם מקסימלית.

2. הוכח כי מכפלה של שני מספרים, שסכומם קבוע, היא הגדולה ביותר, כאשר שני מספרים שווים זה לזה.

3. מצא את מספר $x > 0$ עבורו הסכום $S(x) = x + \frac{1}{x}$ יהיה מינימאלי.

חשב את S_{\min} .

4. נתון מלבן שהיקפו 12.

א. מצא את צלעות המלבן עבורם שטחו יהיה מקסימלי.

ב. חשב את שטח המקסימלי של המלבן.

תשובות: 1. 5.5 . 2. $x = 1, S_{\min} = 2$. 3. 3.3 . 4. א. 3.3 . ב. 9

בעיות מינימום ומקסימום בכלכלה.

1. חברה מוכרת כל יום 100 מוצרים במחיר של 40 ₪ למוצר. על כל הורדה של

שקל אחד ממחיר המוצר החברה מוכרת 4 מוצרים יותר ליום.

חשב מה צריך להיות מחיר המוצר כדי שהכנסה היומית של החברה תהיה

מקסימאלית. תשובה: 32.5

2. חברת התעופה מתכננת טיסה שבה מתוכנן מחיר כרטיס בין \$150 ל-

\$300 עבור אדם. החברה מעריכה שמספר הנוסעים בטיסה יהיה

$300 - 0.75x$, x המחיר הדולרי עבור כרטיס. מה צריך להיות

המחיר לכרטיס שייתן הכנסה מקסימאלית ומה תהא הכנסה זו ?

תשובה: (200, 30000)

3. בטיסת שכר המחיר לנוסע \$ 1000 כל עוד מספר הנוסעים לא עולה על 100. במידה ויש פחות מ- 50 נוסעים מתבטלת הטיסה ואם יש יותר מ- 100 הרי שאז יורד מחיר לכל נוסע ב- \$ 4 על כל נוסע מעל ה- 100. מה יהיה המחיר לכרטיס עבורו תתקבל הכנסה מקסימאלית ומהי הכנסה זו ?
תשובה : (75; 122500)

4. המרחק בין שתי ערים 300 ק"מ. נהג אוטובוס מרוויח 42.25 ₪ לשעה ויתר ההוצאות בהסעת האוטובוס במהירות קבועה של x קמ"ש הן $180 + x$ אגורות לק"מ. המהירויות המותרות הן מינימום 50 קמ"ש ומקסימום 80 קמ"ש. מה תהיה מהירות הנסיעה על מנת שההוצאות יהיו מינימאליות ?
תשובה : 65 קמ"ש

5. א. יצרן מוכר מכשירי רדיו ב- 68 ₪ ליחידה. העלות C בייצור x מכשירים לשבוע, נתונה על ידי הפונקציה $C(x) = 1200 + 8x + 0.004x^2$. בהנחה שניתן לייצר לכל היותר 10,000 מכשירים בשבוע, כמה כדאי לו לייצר ולמכור על מנת שהרווח השבועי יהיה מקסימאלי ומהו רווח זה ?
תשובה : (א) (7500, 223800)
(ב) אם בשבוע מסוים הוחלט לייצר לכל היותר 7000 מכשירים כמה כדאי לייצר על מנת שיהיה רווח מקסימאלי ? תשובה : (ב) (7000, 222800)

6. חברה מרוויחה 30 ₪ עבור כל מכשיר שהיא מייצרת כל עוד היא מייצרת לכל היותר 1000 מכשירים. אם הרווח לכל מכשיר יורד ב- 3.75 אגורות על כל מכשיר מעל ה- 1000, כמה תייצר על מנת שהרווח שלה יהיה מקסימאלי ? תשובה : (1000, 30000)
7. בפרדס מניב כל עץ 15 שקי פרי כל עוד בפרדס לכל היותר 40 עצים לדונם. כאשר יש יותר מ- 40 עצים לדונם יורדת התפוקה של כל עץ ב- $\frac{3}{10}$ השק על כל עץ מעל ה- 40. מה יהיה מספר העצים לדונם שייתן תפוקה מקסימאלית ומהי תפוקה זו ?
תשובה : (5, 607.5)

8. העלות בייתור x טון זהב היא $x^2 + 40x + 30$ ₪. אם מיוצרים יותר מ- 10 טון, הדרישה לתוספת בכוח אדם מגדילה את העלות ב- $20(x-10)$ ₪. המחיר לטון הוא 90 ₪ באופן קבוע והתפוקה המקסימאלית היא 20 טון. כמה כדאי לייצר על מנת שיהיה רווח מקסימאלי ?
תשובה : 15

9. חברת תיור מארגנת טיול ל-30 מטיילים כך שהמחיר למטייל הוא 250 ₪. על כל מטייל נוסף שמצטרף, החברה מורידה את המחיר לכל אחד מהמטיילים ב- 5 ₪. מה צריך להיות מספר המטיילים כדי שלחברה יהיה הרווח הגדול ביותר ? תשובה : 40

10. א. תייר מעוניין לעבור דרך של 1000 ק"מ במהירות קבועה והיא לכל היותר 75 קמ"ש ולפחות 40 קמ"ש. הוצאות שכירות הרכב הן 16 ₪ לכל שעת נסיעה. הוצאות הדלק תלויות במהירות הנסיעה. אם מהירות הנסיעה היא x קמ"ש, הוצאות הדלק הן $\frac{x}{400}$ ₪

לכל ק"מ. באיזו מהירות עליו לנסוע כדי לקבל הוצאה מינימאלית ומהי ?
תשובה : (א) (75, 400.8)

ב. כיצד, אם בכלל, תשתנה תשובתך באם התייר מוכן לנסוע במהירות קבועה שלא תעלה על 100 קמ"ש ? תשובה : (ב) (80, 400)

פונקציות של שני משתנים . נגזרות חלקיות

I . מצא את נגזרות חלקיות $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}$ של פונקציות הבאות :

$f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2$.2 $f(x, y) = 4x^3 - 3xy^2$.1

$f(x, y) = 2x \ln y + 4x^5$.4 $f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{2}{y}$.3

$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$.6 $f(x, y) = \frac{y}{x}$.5

תשובות:

$\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y, \frac{\partial f}{\partial x} = 4x - y$.2 $\frac{\partial f}{\partial y} = -6xy, \frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 - 3y^2$.1

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{y}, \frac{\partial f}{\partial x} = 2 \ln y + 20x^4$.4 $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{y^2}$.3

$f'_x = \frac{2y}{(x+y)^2}, f'_y = -\frac{2x}{(x+y)^2}$.6 $f'_x = -\frac{y}{x^2}, f'_y = \frac{1}{x}$.5

II . מצא את נגזרות חלקיות מסדר גבוה

$(f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, f''_{yx})$:

$f(x, y) = \ln x + \ln y$.2 $f(x, y) = x^4 y + 2e^x$.1

$f(x, y) = y^2 - 2x^2 y + 7y$.4 $z(x, y) = x \ln y + \frac{y}{x}$.3

תשובות:

$f''_{xy} = f''_{yx} = 4x^3, f'_y = x^4, f'_x = 4x^3 y + 2e^x$.1

$f''_{xy} = 0, f'_y = \frac{1}{y}, f'_x = \frac{1}{x}$.2

$z''_{xy} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}, z'_y = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}, z'_x = \ln y - \frac{y}{x^2}$.3

$f''_{xy} = -4x, f'_y = 2y - 2x^2 + 7, f'_x = -4xy$.4

III .

חשב את נגזרות חלקיות של הפונקציה $z = \ln(x^2 - y^2)$ בנקודה $x = 2, y = -1$

תשובה : $z'_x = \frac{2x}{x^2 - y^2}, z'_y = -\frac{2y}{x^2 - y^2}, z'_x(2, -1) = \frac{4}{3}, z'_y(2, -1) = \frac{2}{3}$

- 11 -

נקודות קריטיות, מקסימום ומינימום בתנאי,
ערך מקסימאלי ומינימאלי של פונקציות בשני משתנים

I . מצא את נקודות קריטיות של הפונקציות הבאות ומיין אותן :

- | | |
|---|--|
| 1 . $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ | 2 . $z = 14x^3 + 27xy^2 - 69x - 54y$ |
| 3 . $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 8$ | 4 . $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$ |
| 5 . $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$ | 6 . $g(x, y) = 3 \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln(12 - x - y)$ |

7 . $z = x^3 + xy^2 + 6xy$

8 . $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cx + dy + e$ כאשר $a \neq 0, b \neq 0$ (מיין את נקודות קריטיות בהתאם לסימני המקדמים).

תשובות :

- | | |
|--|--|
| 1 . $\min f(x, y) = f(1, \frac{1}{2}) = 4$ | 2 . $\min z = z(1, 1) = -82; \max z = z(-1, -1) = 82$ |
| 3 . $\min z = z(1, -2) = 3$ | 4 . $\min f(x, y) = f(1, 4) = -21$ |
| 5 . $\min z = z(6, 6) = -2$ | 6 . $\max g(x, y) = g(6, 4) = 5 \ln 2$ |
| 7 . $\max z = z(-\sqrt{3}, -3) = 6\sqrt{3}$ | $\min z = z(\sqrt{3}, -3) = -6\sqrt{3}$ |
- 8 .** נקודה קריטית $x_0 = -\frac{c}{2a}, y_0 = -\frac{d}{2b}$. בהתאם לסימני המקדמים נקבל שלושה המקרים :

- (א) כאשר a, b בעלי סימנים שונים, כלומר $a > 0, b < 0$ או $a < 0, b > 0$, (x_0, y_0) היא נקודת אוכף
- (ב) כאשר a, b מספרים חיוביים, כלומר $a > 0, b > 0$, (x_0, y_0) היא נקודת מינימום
- (ג) כאשר a, b מספרים שליליים, כלומר $a < 0, b < 0$, (x_0, y_0) היא נקודת מקסימום

II . מצא את נקודות קריטיות של $z(x, y)$ עם האילוץ, כאשר

1 . $z(x, y) = x^2 + 2y^2$, האילוץ $3x + 2y = 11$. **תשובה :** $x = 3, y = 1$

2 . $z(x, y) = xy$, האילוץ $2x + 3y - 5 = 0$. **תשובה :** $x = \frac{5}{4}, y = \frac{5}{6}$

3 . $z(x, y) = x^2 + y^2$, האילוץ $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$. **תשובה :** $x = 1.44, y = 5.76$

4 . $z(x, y) = x^2 + y^2$, האילוץ $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$

תשובה : $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2}, y_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

5 . נסמן x, y - אורכם של ניצבים במשולש ישר זווית, S - שטחו.

מבין כל משולשים ישרי הזווית בעלי השטח S מצא את משולש, אשר יתרו הוא

הקטנה ביותר, אם ידוע כי $S = \frac{1}{2}xy$. **תשובה :** $x = \sqrt{2S}, y = \sqrt{2S}$

בעיות מינימום ומקסימום בכלכלה (פונקציות של שני משתנים)

1. פונקצית התפוקה של מפעל מסוים נתונה על ידי הנוסחה :
 $f(x,y) = -0.02x^3 + 0.63x^2 - 0.01y^3 + 0.24y^2$
 כאשר x הוא מספר יחידות העבודה ו- y הוא מספר יחידות ההון.
 מהן כמויות העבודה וההון אשר יתנו תפוקה מקסימאלית? מה תהיה אז התפוקה?
תשובה: $(x,y) = (21,16)$, $f(21,16) = 113.09$
2. סופרמרקט קונה את שני סוגים של פחיות מיץ במחירים 3 ש"ח ו-4 ש"ח לפחית .
 אם המיץ הזול ימכור ב- x ש"ח ($x > 3$) לפחית , המיץ היקר ימכור ב- y ש"ח ($y > 4$) לפחית , אז תוך יום אחד יימכרו $(700 - 500x + 400y)$ פחיות מיץ הזול , ו- $(800 + 600x - 700y)$ פחיות מיץ היקר .
 מצא את מחירים x, y שמקיימים רווח מקסימאלי . **תשובה:** $x = 5.3, y = 5.5$
3. פונקצית התפוקה של מפעל מסוים נתונה על ידי $f(x,y) = Ax^k y^{1-k}$ (פונקצית Cobb-Duglas) כאשר x - יחידות ההון שנותן בנק להוצאות המפעל "לעבודה", כגון משקורות לעובדים , y - יחידות ההון שנותן בנק להוצאות המפעל על ציוד , A - מקדם קנה-המידה , k - קבוע , $0 < k < 1$.
 הון, שנותן בנק להוצאות המפעל , הוא מוגבל : $x + y = M$, $M > 0$ -קבוע , מהן כמויות ההון "לעבודה" ולציוד כך שפונקצית התפוקה $f(x,y)$ תהיה מקסימאלית?
 השתמש בכופלי לגרנז' לפתור את הבעיה עם הנתונים הבאים :
- | | |
|---------------------------------------|---|
| $x = 35, y = 35$: תשובה | $M = 70, f(x,y) = \sqrt{xy}$ (א) |
| $x = 20, y = 40$: תשובה | $M = 60, f(x,y) = 4\sqrt[3]{xy^2}$ (ב) |
| $x = 60, y = 90$: תשובה | $M = 150, f(x,y) = \sqrt[5]{x^2 y^3}$ (ג) |
| $x = 5.33, y = 26.67$: תשובה | $M = 32, f(x,y) = 2\sqrt[6]{xy^5}$ (ד) |
| $x = 21.33, y = 42.67$: תשובה | $M = 64, f(x,y) = \sqrt[6]{x^2 y^4}$ (ה) |
4. חברה מונופוליסטית משווקת את אותו המוצר בשני מרכזים שונים במחירים שונים. אם מחיר המוצר במרכז A הוא x ש"ח ובמרכז B הוא y ש"ח אזי הביקושים היומיים יהיו $q_A = 57 - x$ ו- $q_B = 82 - 2y$, בהתאמה. עלות הייצור היא $577 + 3q_A - 5q_B$ ש"ח.
 מה צריך להיות מחיר המוצר בכל אחד מהמרכזים, כדי שהרווח יהיה מקסימאלי?
 מהן הכמויות שימכרו ומה יהיה אז הרווח?
תשובה: $(x_0, y_0) = (30, 18)$, $(q_A, q_B) = (27, 46)$, $f(30, 18) = 1210$
5. מפעל מייצר שני סוגים של מחסני עץ : A ו-B בכמויות q_A ו- q_B בהתאמה . המחירים לצרחה הם p_A ו- p_B אלפי ש"ח ליחידה , בהתאמה . בהנחה שכל כמויות הייצור משווקות לצרחה , מהן כמויות הייצור אשר מניבות רווח מקסימאלי , כאשר $p_A = 26 - q_A^2$, $p_B = 36 - q_B^2$ ועלות הייצור היא $3.5q_A^2 + 1.5q_B^2$.
תשובה: $q_A = 2$, $q_B = 3$.

האינטגרל הלא מסוים

I . חשב את האינטגרלים הבאים תוך שימוש בטבלת האינטגרלים והתכונות :

$$\int (1+e^x)^2 dx \quad .3 \quad \int (3x^2 - 4x + 5)dx \quad .2 \quad \int (x^2 - 1)(x+3)dx \quad .1$$

$$\int \frac{x^2 + 3x^6 - 2x^4}{x^4} dx \quad .6 \quad \int \frac{7x^5 + x - x^2}{x^3} dx \quad .5 \quad \int (3x^2 - 4)^2 dx \quad .4$$

$$\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{3^x} dx \quad .9 \quad \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad .8 \quad \int \frac{4}{3x} dx \quad .7$$

$$\int (2 \cos x - 3 \sin x) dx \quad . * 12 \quad \int \frac{(x^2 + 1)dx}{\sqrt{x}} \quad .11 \quad \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx \quad .10$$

II . לחשב את האינטגרלים הבאים השתמש במשפט :

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c \quad \text{אז} , \int f(x)dx = F(x) + c \quad \text{אם}$$

$$\int \sqrt[3]{4-5x} dx \quad .3 \quad \int (5-8x)^6 dx \quad .2 \quad \int (2x+1)^9 dx \quad .1$$

$$\int \frac{1}{2-3x} dx \quad .6 \quad \int \frac{1}{(9x-2)^6} dx \quad .5 \quad \int \sqrt[4]{8-7x} dx \quad .4$$

$$\int 2^{3-2x} dx \quad .9 \quad \int e^{ax} dx \quad .8 \quad \int e^{4-3x} dx \quad .7$$

$$\int \cos 2x dx \quad . * 12 \quad \int \sin 7x dx \quad .11 * \quad \int \frac{dx}{3^{2x+1}} \quad .10$$

$$\int \cos \frac{x}{5} dx \quad . * 14 \quad \int \sin(4+3x) dx \quad . * 13$$

III . השתמש בשיטת ההצבה לחשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int (3x^2 + 4x)(x^3 + 2x^2)^3 dx \quad .3 \quad \int (x^5 - 7)^3 5x^4 dx \quad .2 \quad \int (x^2 + 1)^7 2x dx \quad .1$$

$$\int xe^{-x^2} dx \quad .6 \quad \int y\sqrt{1+2y^2} dy \quad .5 \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-7}} \quad .4$$

$$\int \frac{x^2}{7-x^3} dx \quad .9 \quad \int x^4 \sqrt{3-x^5} dx \quad .8 \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4-1}} \quad .7$$

$$\int \frac{2xdx}{\sqrt{6-x^2}} \quad .12 \quad \int \frac{6x}{\sqrt{3x^2+1}} dx \quad .11 \quad \int \frac{4x^3}{x^4-16} dx \quad .10$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx \quad . * 14 \quad \int \cos^3 x \sin x dx \quad . * 13$$

IV. חשב את האינטגרלים הבאים תוך שימוש בשיטת ההצבה:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-\sqrt{x})}} \quad .3 \quad \int x^2 \sqrt{x-1} dx \quad .2 \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} \quad .1$$

$$\int (3x+1)^7 2x dx \quad .6 \quad \int \frac{xdx}{(x-1)^3} \quad .5 \quad \int x(2x+5)^{10} dx \quad .4$$

$$\int \frac{e^x}{e^x-1} dx \quad .8 \quad \int e^x \sqrt{e^x-2} dx \quad .7$$

V. השתמש באינטגרציה בחלקים לחישוב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx \quad .4 \quad \int x \ln x dx \quad .3 \quad \int x^2 e^{3x} \quad .2 \quad \int x e^x \quad .1$$

$$\int (2x+1)3^x dx \quad .8 \quad \int x 2^x dx \quad .7 \quad \int x^3 e^{x^2} dx \quad .6 \quad \int x \ln(x^2+1) dx \quad .5$$

$$\int (3x+2) \sin 2x dx \quad . * 12 \quad \int x \cos x dx \quad . * 11 \quad \int \sin \sqrt{x} dx \quad . * 10 \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad .9$$

VI. חשב את האינטגרלים של פונקציות רציונאליות:

$$\int \frac{dx}{(x-2)(x+1)} \quad .4 \quad \int \frac{x}{(x^2-1)} dx \quad .3 \quad \int \frac{x-1}{x+1} dx \quad .2 \quad \int \frac{x}{x+1} dx \quad .1$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+5x+4} \quad .8 \quad \int \frac{dx}{x(x^2-1)} \quad .7 \quad \int \frac{dx}{x^2-5x+4} \quad .6 \quad \int \frac{dx}{x^2-5x+6} \quad .5$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x-2)^2(x-1)} \quad . * 11 \quad \int \frac{xdx}{(x+2)^2(x+1)} \quad . * 10 \quad \int \frac{dx}{x^2(x-1)} \quad . * 9$$

$$\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x} \quad . * 14 \quad \int \frac{dx}{x(x^2+1)} \quad . * 13 \quad \int \frac{x^2 dx}{2x^2-9x+4} \quad . * 12$$

תשובות (עמ' 14, 13):

$$-\frac{2(3-x^5)^{\frac{3}{2}}}{15} + c \quad .8 \quad -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c \quad .6 \quad (x^2-7)^{\frac{1}{2}} + c \quad .4 \quad \frac{(x^5-7)^4}{4} + c \quad .2 \quad .III$$

$$5 \sin \frac{x}{5} + c \quad .14 \quad \frac{1}{2} \sin 2x + c \quad .12 \quad \ln|x^4-16| + c \quad .10$$

$$\frac{1}{48}(2x+5)^{12} - \frac{1}{8}(2x+5)^{11} + c \quad .4 \quad \frac{2}{7}\sqrt{(x-1)^7} - \frac{4}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + c \quad .2 \quad .IV$$

$$\ln|e^x-1| + c \quad .8 \quad \frac{2}{81}(3x+1)^9 - \frac{1}{36}(3x+1)^8 + c \quad .6$$

$$(x^2-1)e^{x^2} + c \quad .6 \quad \ln x - \frac{1+x}{x} \ln(1+x) + c \quad .4 \quad \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right)e^{3x} + c \quad .2 \quad .V$$

$$2 \sin \sqrt{x} - 2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + c \quad .10 \quad \frac{(2x+1)3^x}{\ln 3} - \frac{2 \cdot 3^x}{(\ln 3)^2} + c \quad .8$$

$$\frac{3}{4} \sin 2x - \left(\frac{3}{2}x+1\right) \cos 2x + c \quad .12$$

האינטגרל המסוים . נוסחת ניוטון - לייבניץ

חישוב שטחים של תחומים מישוריים על ידי אינטגרל מסוים .

I . חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^{\sqrt{5}} x\sqrt{x^2+4} dx \quad .3 \qquad \int_1^3 \frac{dx}{x} \quad .2 \qquad \int_0^2 x(3-x) dx \quad .1$$

$$\int_{-1}^1 (2x+5)e^{3x} dx \quad .6 \qquad \int_0^2 \frac{(2x+1)dx}{x^2-2x-3} \quad .5 \qquad \int_1^2 \frac{e^x}{e^x-1} dx \quad .4$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2+1, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{כאשר, } \int_{-1}^1 f(x) dx \quad .7$$

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx \quad .10 \qquad \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx \quad .9 \qquad \int_1^e x^2 \ln x dx \quad .8$$

תשובות : $\frac{1}{3}$.1 $\ln 3$.2 $6\frac{1}{3}$.3 $\ln(e+1)$.4

$$\frac{2e^3+1}{9} \quad .8 \quad -\frac{5}{6} \quad .7 \quad \frac{19}{9}e^3 - \frac{7}{9}e^{-3} \quad .6 \quad -\frac{3}{2}\ln 3 \quad .5$$

$$\pi \quad .10 \quad 3+2\ln\frac{4}{3} \quad .9$$

II . חשב את שטח של התחום D החסום על ידי הקווים הנתונים :

$$D: \left\{ \begin{array}{l} y = x^2, \quad y = 0 \\ y = -x+6 \end{array} \right\} \quad .3 \quad D: \left\{ \begin{array}{l} y = -x+3, \\ y = x^2-2x-3, \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \quad .2 \quad D: \left\{ \begin{array}{l} y = x^2-2x-6, \\ y = 6-x^2 \end{array} \right\} \quad .1$$

$$D: \left\{ \begin{array}{l} y^2 = x, \\ y = x-2 \end{array} \right\} \quad .6 \quad D: \left\{ \begin{array}{l} y = -x^2, \quad y = 0 \\ y = x-2 \end{array} \right\} \quad .5 \quad D: \{y = x^3, y = x\} \quad .4$$

$$D: \left\{ \begin{array}{l} y = \sqrt{x}, \quad y = 0 \\ y = x-2 \end{array} \right\} \quad .7$$

.8 לפרבולה $y = x^2$ העבירו משיק בנקודה $x = 1$.

מצא את שטח הכלוא בין הפרבולה, הישר המשיק, וציר ה- y .

תשובות: (1) $S = 41\frac{2}{3}$ (2) $S = 13.5$ (3) $S = 10\frac{2}{3}$ (4) $S = \frac{1}{2}$

(5) $S = \frac{5}{6}$ (6) $S = 4\frac{1}{2}$ (7) $S = \frac{10}{3}$ (8) $S = \frac{1}{3}$

I. חשב את סכום רימן של $f(x, y)$ המתאים לחלוקה ב-4 חלקים שווים ותלוי בבחירת הנקודה (x_i, y_j) במלבן (או ריבוע) D_i .

1. $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$, $f(x, y) = \frac{x}{y}$

2. $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 4\}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$

3. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$, $f(x, y) = 2xy - y^2$

תשובות: 1. עבור $x_0 = \frac{3}{2}, x_1 = 2, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = 2$
 $y_0 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = 1, y_3 = 1$
 נקבל $\sum_{i=1}^4 f(x_i, y_i) \Delta D_i = \frac{21}{8}$

2. עבור $x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2$
 $y_0 = 2, y_1 = 3, y_2 = 3, y_3 = 2$
 נקבל $\sum_{i=1}^4 f(x_i, y_i) \Delta D_i = 36$

3. עבור $x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 3$
 $y_0 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = \frac{1}{2}, y_3 = \frac{3}{2}$
 נקבל $\sum_{i=1}^4 f(x_i, y_i) \Delta D_i = 22$

II. תוך שימוש בתכונה $m \cdot S(D) \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \cdot S(D)$ כאשר $m = \min_D f(x, y), M = \max_D f(x, y)$ הערך את האינטגרלים הבאים:

1. $I = \iint_D (x + y + 1) dx dy$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

2. $I = \iint_D xy(x + y) dx dy$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$

III. חשב את האינטגרלים החוזרים הבאים:

3. $\int_0^1 dx \int_0^{2x} dy$. 4. $\int_2^4 dx \int_x^{2x} \frac{y}{x} dy$. 5. $\int_1^2 dy \int_0^{\ln y} e^x dx$

IV. חשב את האינטגרלים הכפולים הבאים:

6. $\iint_D e^{x+y} dA$, $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 2\}$

7. $\iint_D xy dA$, $D = \{(x, y) \mid x + y = 6, y = 0, x = 0\}$

8. $\iint_D \frac{y}{x} dA$, $D = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

9. $\iint_D (x^2 + y) dA$, $D = \{(x, y) \mid y = x^2, y^2 = x\}$

תשובות: 1. $2 \leq I \leq 8$. 2. $0 \leq I \leq 64$. 3. 1 . 4. 9 . 5. $\frac{1}{2}$

6. $e^5 - e^3 - e^2 + 1$. 7. 54 . 8. 9 . 9. $\frac{33}{140}$

V. חשב את V נפח של הגוף החסום על ידי המשטחים הבאים:

1. תשובה: $V = 1$ $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$

2. תשובה: $S = 72$ $x = 4, y = 4, x = 0, y = 0, z = 0, x + 2y + z = 1$

3. תשובה: $S = \frac{9}{2}$ $2x + 3y - 12 = 0, x = 0, y = 0, z = x^2 + y^2$