שאלה 1

$$P(X < 50) = 0.03$$

$$P\left(Z < \frac{50-\mu}{\sigma}\right) = 0.03$$

$$\varphi\left(\frac{50-\mu}{\sigma}\right) = 0.03$$

$$\frac{50-\mu}{\sigma} = Z_{0.03} = -Z_{0.97} = -1.8$$

$$\sigma = \frac{50-\mu}{-1.88}$$

$$P(X > 80) = 0.06$$

$$P\left(Z > \frac{80-\mu}{\sigma}\right) = 0.06$$

$$1 - \varphi\left(\frac{80-\mu}{\sigma}\right) = 0.06$$

$$\varphi\left(\frac{80-\mu}{\sigma}\right) = 0.94$$

$$\frac{80-\mu}{\sigma} = Z_{0.94} = 1.56$$

$$\sigma = \frac{80-\mu}{1.56}$$

$$\frac{50-\mu}{-1.88} = \frac{80-\mu}{1.56}$$

$$78 - 1.56\mu = -150.4 + 1.88\mu$$

$$\mu = 66.34, \quad \sigma = 8.72$$

(c) $P(X>65) = P\left(Z > \frac{65-66.34}{8.72}\right)$

$= 1-\varphi(-0.16) = 1-(1-\varphi(0.16))$

$= \varphi(0.16) = 0.5636 = \boxed{56.36\%}$

ג) $K =$ ציון מעבר

$P(X<K) = 0.1 \to P\left(Z< \frac{K-66.34}{8.72}\right) = 0.1$

$\varphi\left(\frac{K-66.34}{8.72}\right) = 0.1$

$$\frac{K-66.34}{8.72} = Z_{0.1} = -1.28$$

$K = 55.23 \longrightarrow \boxed{K = 55}$

שאלה 2

א) $X =$ מספר הבנים בוועד

$$P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$$

$$= \frac{\binom{7}{4}\binom{8}{2}+\binom{7}{5}\binom{8}{1}+\binom{7}{6}}{\binom{15}{6}}$$

$$= \frac{980+168+7}{5005} = \boxed{0.23}$$

ב) נגדיר

$A =$ בחירת 3 בנים

$B =$ בחירת זכר אחד

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A\cap B) = \frac{\binom{8}{3}\binom{7}{3}+\binom{8}{4}\binom{7}{2}+\binom{8}{5}\binom{7}{1}}{\binom{15}{6}}$$

$$= \frac{1960+1470+392}{5005} = 0.76$$

$$P(B) = 1-\frac{\binom{8}{6}}{\binom{15}{6}} = 0.99 \rightarrow P(A/B) = \frac{0.76}{0.99}$$

$$\boxed{0.768}$$

שאלה 3

א) $\mu = 0.5$

$\sigma = 0.2$

$n = 100$

$$S \sim N(n\mu, \sqrt{n}\,\sigma)$$

$$S \sim N(50, 2)$$

$$P(S<45) = P\left(Z < \frac{45-50}{2}\right)$$

$$= \varphi(-2.5) = 1 - \varphi(2.5) = 1 - 0.9938$$

$$= \boxed{0.0062}$$

ב) נמצא K כך ש:

$$P(S<K) = 0.9$$

$$P\left(Z < \frac{K-50}{2}\right) = 0.9$$

$$\varphi\left(\frac{K-50}{2}\right) = 0.9$$

$$\frac{K-50}{2} = Z_{0.9} = 1.282$$

$$\boxed{K = 52.56}$$

שאלה 4

$A =$ הראשונה תקפה

$B =$ השנייה תקפה

<u>נתון</u>

$(1)\ P(\bar{A}) = 0.35 \quad (2)\ P(\bar{B}) = 0.3$

$$(3)\ \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = 0.3$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$

לפי ב- (3)

$$\frac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{1 - P(A \cap B)} = 0.3$$

$$1 - 0.65 - 0.7 + P(A \cap B) = 0.3 - (0.3)P(A \cap B)$$

$$1.3\, P(A \cap B) = 0.65 \rightarrow P(A \cap B) = \boxed{0.5}$$

2) $P(\bar{A}/\bar{A}\cup\bar{B}) = \dfrac{P(\bar{A}\cap(\bar{A}\cup\bar{B}))}{P(\bar{A}\cup\bar{B})}$

$= \dfrac{P(\bar{A})}{1-P(A\cap B)} = \dfrac{0{,}35}{0.5} = \boxed{0{,}7}$

שאלה 5

(c) $\int_0^\infty x e^{-x/2}\,dx$

$$\left[\begin{array}{ll} f = x & g' = e^{-x/2} \\ f' = 1 & g = -2e^{-x/2} \end{array}\right]$$

$$= \underbrace{-2xe^{-x/2}\Big|_0^\infty}_{0} + \int_0^\infty 2e^{-x/2}\,dx$$

$$= -4e^{-x/2}\Big|_0^\infty = 4 \rightarrow \boxed{C = \frac{1}{4}}$$

נמצא את פונקציית ההתפלגות

$$F(x) = \frac{1}{4}\int_0^x t e^{-t/2}\,dt$$

$$= 1 - \frac{xe^{-x/2}}{2} - e^{-x/2}$$

ד) $P(X>8 / X>5) = \dfrac{P(X>8)}{P(X>5)}$

$$= \frac{1-F(8)}{1-F(5)} = \frac{5e^{-4}}{\frac{7}{2}e^{-5/2}} = \frac{0.091}{0.287}$$

$$= \boxed{0.317}$$

ג) A = 2 יחזיקו מעמד יותר מ-8
B = 3 יחזיקו מעמד פחות מ-5

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B/A)$$

y = מספר המכשירים שיחזיקו מעמד יותר מ-8 חודשים

$$y \sim B(10, P)$$

$$P = 1 - F(8) = 0.091$$

$$P(A) = P(y=2) = \binom{10}{2}(0.091)^2(0.909)^8$$

$$= 0.174$$

W = מספר המכשירים מתוך 8 הנותרים שיחזיקו מעמד פחות מ-5 חודשים

$$W \sim B(8, P)$$

$$P = P(X<5/X<8) = \frac{F(5)}{F(8)} = \frac{0.713}{0.909}$$

$$= 0.784$$

$$P(B/A) = P(W=3) = \binom{8}{3}(0.784)^3(0.216)^5$$

$$= 0.013$$

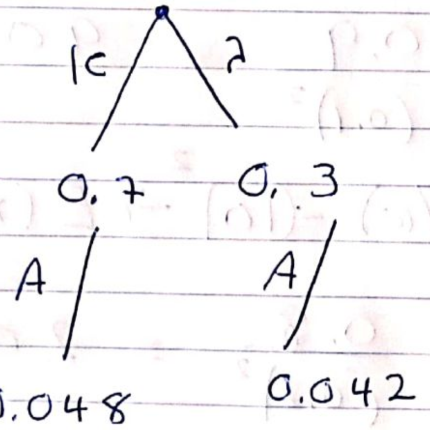
$$P(A\cap B) = (0.174)(0.013) = \boxed{0.0022}$$

שאלה ד 6

$A =$ בדיוק 8 הצלחות

$$P(A/\text{א}) = (0.9)^7 (0.1) = 0.048$$

$$P(A/\text{ב}) = (0.8)^7 (0.2) = 0.042$$



א) $P(X=8) = (0.048)(0.7) + (0.042)(0.3)$

$$= \boxed{0.0462}$$

ב) $$P(\text{א}/A) \overset{\text{בייס}}{=} \frac{P(A/\text{א}) \cdot P(\text{א})}{P(A)}$$

$$= \frac{(0.048)(0.7)}{0.0462} = \boxed{0.727}$$

ع) $E(X) = E(X/\text{ك}) \cdot P(\text{ك}) + E(X/\text{د}) \cdot P(\text{د})$

$= 10(0.7) + 5(0.3) = \boxed{8,5}$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$E(X^2) = E(X^2/\text{ك}) \cdot P(\text{ك}) + E(X^2/\text{د}) \cdot P(\text{د})$

$Var(X/\text{ك}) = \dfrac{0.9}{(0.1)^2} = 90$

$90 = E(X^2/\text{ك}) - (10)^2 \rightarrow E(X^2/\text{ك}) = 190$

$Var(X/\text{د}) = \dfrac{0.8}{(0.2)^2} = 20$

$20 = E(X^2/\text{د}) - 5^2 \rightarrow E(X^2/\text{د}) = 45$

$E(X^2) = 190(0.7) + 45(0.3) = 146.5$

$Var(X) = 146.5 - (8.5)^2 = \boxed{74,25}$