

אוניברסיטת אריאל בשומרון

מבחן בנושא: סטטיסטיקה והסתברות

מרצים

ד"ר אפרים שמרלינג מס קורס: 2-4422010-5

ד"ר אליעזר הירשברג מס קורס: 2-4422010-4

ד"ר אלכסנדר קפלונובסקי מס קורס: 2-4422010-2, 2-4422010-1

ד"ר רונן גרדוול מס קורס: 2-4422010-3

מתרגלים

צחי שביט רן סגל אילנה יודובנו דביר רוס אחיה דודוביץ לב קלינר

סמסטר א', מועד א', תש"ף, 17.02.2020

זמן הבחינה: 150 דקות

מותר להשתמש במחשבון

נא לכתוב בכתב ברור.

יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות הבאות (כל שאלה 20 נקודות)

שאלה 1

א. כל אחד משלושה חברים מטיל קובייה (6 פאות עם מספרים מ-1 עד 6). אם כולם מקבלים אותו מספר אף אחד מהם לא מקבל כסף. אם כולם מקבלים מספרים שונים אז כל אחד מהם מקבל 2 מטבעות. אם לשני חברים יוצא אותו מספר ולאחד יוצא מספר שונה (נגיד K) אז הוא מקבל K מטבעות ושנים האחרים לא מקבלים כסף. נסמן ב-X את מספר המטבעות שיקבלו כל החברים ביחד. מצא את התוחלת ואת השונות של ה-X.

ב. כל אחד מ-40 חיילים יורה במטרה עד הפגיעה הראשונה שלו. סיכוי לפגוע במטרה בכל ירייה שווה ל-0.4 לכל חייל. למה שווה ההסתברות שמספר היריות של כל החיילים יהיה גדול מ-90?

פיתרון

א.

מספר תוצאות אפשריות בהטלת 3 קוביות 6^3

$X = 0$ מספר תוצאות אפשריות אם כולם מקבלים אותו מספר 6

$X = 1, 2, \dots, 5$ אם לשני חברים יוצא אותו מספר ולאחד יוצא מספר שונה $3 \cdot 5 = 15$ (5 מספרים, 3 חברים)

$X = 6$ אם לשני חברים יוצא אותו מספר ולאחד יוצא מספר שונה $3 \cdot 5 = 15$

וגם אם כולם מקבלים מספרים שונים $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

X	0	1	2	3	4	5	6
P(X=k)	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{15}{6^3} + \frac{120}{6^3}$

$$E[X] = 4.792$$

$$\text{Var}[X] = 3.356$$

ב.

$$X \sim G(0.4)$$

$$\mu = E[X] = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

$$\sigma^2 = \text{Var}[X] = \frac{1-0.4}{0.4^2} = 3.75$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{40} X_i > 90\right) = 1 - \Phi\left(\frac{90 - 40 \cdot 2.5}{\sqrt{3.75} \cdot \sqrt{40}}\right) = 1 - \Phi(-0.816) = 0.7939$$

שאלה 2

א. במס הכנסה יושבים שני פקידים. מספר האנשים המגיעים לכל אחד מן הפקידים מתפלג פואסונית עם ממוצע של 3 אנשים ל-30 דקות לפקיד הראשון וממוצע של 2 אנשים ל-40 דקות לפקיד השני. אם ידוע שבמשך 30 דקות הגיעו למס הכנסה לפחות שני אנשים, מה ההסתברות ש-2 התקבלו ע"י הפקיד הראשון ו-3 ע"י הפקיד השני?

ב. דוהר בוחר באקראי את אחד משלושה סוסים
אם הוא בוחר סוס לבן אז משך זמן שהוא רוכב על הסוס (בשעות) הוא משתנה מיקרי בעל פונקציית צפיפות

$$g(y) = 0.5, 0 < y < 2$$

אם הוא בוחר סוס שחור אז משך זמן שהוא רוכב על הסוס הוא משתנה מיקרי בעל פונקציית צפיפות

$$t(z) = 0.5z, 0 < z < 2$$

אם הוא בוחר סוס אפור אז משך זמן שהוא רוכב על הסוס הוא משתנה מיקרי בעל פונקציית צפיפות

$$f(x) = 2e^{-2x}, x > 0$$

אם ידוע כי הרוכב רכב יותר משעה למה שווה ההסתברות שהסוס השחור לא נבחר?

פיתרון

א.

$$\begin{aligned}
 X &\sim P(3), Y \sim P(1.5), X + Y \sim P(4.5) \\
 P(X = 2, Y = 3 / X + Y \geq 2) &= \frac{P(X = 2) \cdot P(Y = 3)}{P(X + Y \geq 2)} = \\
 &= \frac{P(X = 2) \cdot P(Y = 3)}{1 - (P(X + Y = 0) + P(X + Y = 1))} = \\
 &= \frac{\frac{3^2}{2!} e^{-3} \cdot \frac{1.5^3}{3!} e^{-1.5}}{1 - \left(\frac{4.5^0}{0!} e^{-4.5} + \frac{4.5^1}{1!} e^{-4.5} \right)} = \frac{0.0281}{0.939} = 0.0299
 \end{aligned}$$

א.

$$\begin{aligned}
 X &\sim P(3), Y \sim P(1.5) \\
 P(X = 2, Y = 3 / X + Y \geq 2) &= \frac{P(X = 2) \cdot P(Y = 3)}{P(X + Y \geq 2)} = \\
 &= \frac{P(X = 2) \cdot P(Y = 3)}{1 - (P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1))} = \\
 &= \frac{\frac{3^2}{2!} e^{-3} \cdot \frac{1.5^3}{3!} e^{-1.5}}{1 - \left(\frac{3^0}{0!} e^{-3} \cdot \frac{1.5^0}{0!} e^{-1.5} + \frac{3^1}{1!} e^{-3} \cdot \frac{1.5^0}{0!} e^{-1.5} + \frac{3^0}{0!} e^{-3} \cdot \frac{1.5^1}{1!} e^{-1.5} \right)} = \frac{0.0281}{0.939} = 0.0299
 \end{aligned}$$

ב.

נסמן:

A_1 דוהר בוחר סוס לבן

A_2 דוהר בוחר סוס שחור

A_3 דוהר בוחר סוס אפור

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

B הרכב יותר משעה

$$P(B / A_1) = \int_1^2 g(y) dy = \int_1^2 0.5 dy = 0.5$$

$$P(B / A_2) = \int_1^2 t(z) dz = \int_1^2 0.5z dz = 0.75$$

$$P(B / A_3) = \int_1^\infty f(x) dx = \int_1^\infty 2e^{-2x} dx = e^{-2} = 0.135$$

$$P(B) = P(B / A_1) \cdot P(A_1) + P(B / A_2) \cdot P(A_2) + P(B / A_3) \cdot P(A_3) = 0.5 \cdot \frac{1}{3} + 0.75 \cdot \frac{1}{3} + 0.135 \cdot \frac{1}{3} = 0.461$$

$$P(\bar{A}_2 / B) = P(A_1 / B) + P(A_3 / B) = \frac{P(B / A_1) \cdot P(A_1) + P(B / A_3) \cdot P(A_3)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot \frac{1}{3} + 0.135 \cdot \frac{1}{3}}{0.461} = 0.459$$

שאלה 3

בפשיטה של המשטרה על מחסן של סרטי DVD מזוייפים, נמצאו 3 הסוגים הבאים (ללא שום סימון חיצוני).
 50% - מהסרטים הם באורך של שעתיים.
 15% - מהסרטים הם באורך של שעה וחצי.
 35% - מהסרטים הם באורך של שלוש שעות.
 לצורך בדיקת איכות הזיוף, דוגם שוטר באקראי 40 קלטות, וצופה בכל הקלטות.
 מה ההסתברות שזמן הצפייה הממוצע בקלטת יעלה על 2.5 שעות?

פיתרון

$$\mu = E[X] = 1.5 \cdot 0.15 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.35 = 2.275$$

$$\sigma^2 = Var[X] = 1.5^2 \cdot 0.15 + 2^2 \cdot 0.5 + 3^2 \cdot 0.35 - 2.275^2 = 0.312$$

לפי משפט הגבול המרכזי:

$$X \sim N(2.275, 0.312)$$

$$P(\bar{X}_{40} > 2.5) = 1 - \Phi\left(\frac{2.5 - 2.275}{\sqrt{0.312 / \sqrt{40}}}\right) = 1 - \Phi(2.548) = 0.0054$$

שאלה 4

משך זמן ההמתנה לאוטובוס הנוסע מתל אביב לאריאל מתפלג נורמלית עם ממוצע של 20 דקות וסטיית תקן של 120 שניות.
 א. נבחר מדגם מקרי 10 נוסעים בלתי תלויים הממתינים בתחנת האוטובוס בצומת קסם. חשב את ההסתברות שמשך זמן ההמתנה הממוצע שלהם יהיה גבוה מ-25 דקות.
 ב. נבחר מדגם מקרי של 10 נוסעים הממתינים בתחנת האוטובוס בצומת קסם. חשב את ההסתברות שמשך זמן ההמתנה הכולל שלהם יהיה גבוה מ-210 דקות.

פיתרון

$$X \sim N(20, 2^2)$$

א.

$$P(\bar{X}_{10} > 25) = 1 - \Phi\left(\frac{25 - 20}{2/\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi(7.90) = 0$$

ב.

$$P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 210\right) = 1 - \Phi\left(\frac{210 - 10 \cdot 20}{2 \cdot \sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi(1.58) = 0.0571$$

שאלה 5

נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי X :

$$f(x) = \begin{cases} c(x - x^3) & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , x < 0, x > 1 \end{cases}$$

א. מצא את מקדם c

ב. מצא את התוחלת את השונות ואת החציון של X .

ג. מצא את פונקציית ההתפלגות מצטברת של X .

ד. מצא את ההסתברות $P(0.5 < X < 2)$

פתרון:

א.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = c \int_0^1 (x - x^3) dx = c \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right)_0^1 = c \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow c = 4$$

ב.-ג.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 4(x^2 - x^4) dx = 4 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right)_0^1 = \frac{8}{15}$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (E(x))^2 = \int_0^1 4(x^3 - x^5) dx - \left(\frac{8}{15} \right)^2 = 4 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} \right)_0^1 - \left(\frac{8}{15} \right)^2 = 0.0489$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx = 4 \int_0^t (x - x^3) dx = 4 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4} \right) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 2t^2 - t^4, & 0 < t \leq 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

$$t = \text{Median} : F(t) = 0.5 \Rightarrow 2t^2 - t^4 = 0.5 \Rightarrow 2t^4 - 4t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t = 0.541$$

ד.

$$P(0.5 < X < 2) = F(2) - F(0.5) = 1 - (2 \cdot 0.5^2 - 0.5^4) = 0.5625$$

שאלה 6

מ"מ X הוא הסכום (באלפים) שיש לדני בחשבון ביום נתון. כל יום הסכום שיש לו לא תלוי בימים הקודמים. $X \sim N(-2, 3^2)$

מצא את ההסתברות שמתוך 10 ימים שנבחרו באקראי בדיוק ב-4 מהם הוא היה ב"פלוס".

פיתרון

$$P(X > 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0 - (-2)}{3}\right) = 1 - \Phi(0.67) = 0.2514$$

$$Y \sim \text{Bin}(10, 0.2514)$$

$$P(Y = 4) = C_{10}^4 \cdot 0.2514^4 \cdot 0.7486^6 = 0.147$$

בהצלחה !

טבלת התפלגות נורמלית סטנדרטית

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916

2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.99903240	0.99906456	0.99909574	0.99912597	0.99915526	0.99918365	0.99921115	0.99923781	0.99926362	0.99928864
3.2	0.99931286	0.99933633	0.99935905	0.99938105	0.99940235	0.99942297	0.99944294	0.99946226	0.99948096	0.99949906
3.3	0.99951658	0.99953352	0.99954991	0.99956577	0.99958111	0.99959594	0.99961029	0.99962416	0.99963757	0.99965054
3.4	0.99966307	0.99967519	0.99968689	0.99969821	0.99970914	0.99971971	0.99972991	0.99973977	0.99974929	0.99975849
3.5	0.99976737	0.99977595	0.99978423	0.99979222	0.99979994	0.99980738	0.99981457	0.99982151	0.99982820	0.99983466
3.6	0.99984089	0.99984690	0.99985270	0.99985829	0.99986368	0.99986888	0.99987389	0.99987872	0.99988338	0.99988787
3.7	0.99989220	0.99989637	0.99990039	0.99990426	0.99990799	0.99991158	0.99991504	0.99991838	0.99992159	0.99992468
3.8	0.99992765	0.99993052	0.99993327	0.99993593	0.99993848	0.99994094	0.99994331	0.99994558	0.99994777	0.99994988
3.9	0.99995190	0.99995385	0.99995573	0.99995753	0.99995926	0.99996092	0.99996253	0.99996406	0.99996554	0.99996696
4	0.99996833	0.99996964	0.99997090	0.99997211	0.99997327	0.99997439	0.99997546	0.99997649	0.99997748	0.99997843
4.1	0.99997934	0.99998022	0.99998106	0.99998186	0.99998263	0.99998338	0.99998409	0.99998477	0.99998542	0.99998605
4.2	0.99998665	0.99998723	0.99998778	0.99998832	0.99998882	0.99998931	0.99998978	0.99999023	0.99999066	0.99999107
4.3	0.99999146	0.99999184	0.99999220	0.99999254	0.99999288	0.99999319	0.99999350	0.99999379	0.99999407	0.99999433
4.4	0.99999459	0.99999483	0.99999506	0.99999529	0.99999550	0.99999571	0.99999590	0.99999609	0.99999627	0.99999644
4.5	0.99999660	0.99999676	0.99999691	0.99999705	0.99999719	0.99999732	0.99999744	0.99999756	0.99999768	0.99999778
4.6	0.99999789	0.99999799	0.99999808	0.99999817	0.99999826	0.99999834	0.99999842	0.99999849	0.99999857	0.99999863
4.7	0.99999870	0.99999876	0.99999882	0.99999888	0.99999893	0.99999898	0.99999903	0.99999908	0.99999912	0.99999917
4.8	0.99999921	0.99999925	0.99999928	0.99999932	0.99999935	0.99999938	0.99999941	0.99999944	0.99999947	0.99999950
4.9	0.99999952	0.99999954	0.99999957	0.99999959	0.99999961	0.99999963	0.99999965	0.99999967	0.99999968	0.99999970
5	0.99999971	0.99999973	0.99999974	0.99999975	0.99999977	0.99999978	0.99999979	0.99999980	0.99999981	0.99999982

סטטיסטיקה תיאורית

סימנים בסיסיים לשימוש :

אורך האינטרוול	l	אמצע הקבוצה	$x' \text{ or } MP$
צפיפות האינטרוול	d	גודל המדגם	N
ממוצע	$\bar{x}$	סכום אברים	Σ
חציון	M_e	שכיחות מוחלטת	f
השכיח	M_0	שכיח ות מצטברת	F
סטיית תקן	σ	שכיחות יחסית	p
שונות	σ^2	ציון תקן	z_i

n - מספר קבוצות (מחלקות)

L_i - גבול תחתון של קטע i.

R_i - גבול עליון של קטע i.

$$x'_i = (L_{in} + R_i) / 2$$

מציאת טווח:

$$R = x_n - x_1 \quad (1)$$

(קיבוץ תצפיות לפי ערכים בודדים)

$$R = R_n - L_1 \quad (2)$$

(קיבוץ נתונים לפי קטעים).

$$p_i = \frac{f_i}{N}$$

$$d_i = \frac{f_i}{l_i},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x'_i \cdot f_i = \sum_{i=1}^n x'_i \cdot P_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum f_i \cdot (x'_i - \bar{x})^2 = \sum P_i \cdot (x'_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum f_i \cdot x_i'^2 - (\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (x'_i)^2 \cdot p_i - (\bar{x})^2$$

מציאת שכיח (קיבוץ תצפיות לפי קטעים)

$$Mo = L_i + \frac{d_i - d_{i-1}}{(d_i - d_{i-1}) + (d_i - d_{i+1})} \cdot l_i$$

$$i - \text{קבוצת השכיח } (f_i \geq f_j, 1 \leq j \leq n)$$

מציאת הציון (קיבוץ תצפיות לפי קטעים)

$$Me = L_i + \frac{l_i}{f_i} \times (\frac{N}{2} - F_{i-1})$$

$$i - \text{קבוצת החציון } (F_{i-1} < \frac{N}{2} \text{ ו- } F_i > \frac{N}{2}).$$

$$F_i = \frac{N}{2}, \text{ אם ניתן למצוא את } i \text{ שעבורו}$$

$$M_e = R_i$$

מציאת הציון (קיבוץ תצפיות לפי ערכים בודדים)

$$\text{אם ניתן למצוא את } i \text{ שעבורו } F_{i-1} < \frac{N}{2} \text{ ו- } F_i > \frac{N}{2}.$$

$$M_e = x_i$$

$$F_i = \frac{N}{2}, \text{ אם ניתן למצוא את } i \text{ שעבורו}$$

$$M_e = (x_i + x_{i+1}) / 2$$

$$z_i = \frac{x'_i - \bar{x}}{\sigma}$$

$$M_k(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x'_i)^k f_i = \sum (x'_i)^k P_i$$

$$\overline{X} = M_1(X)$$

$$\sigma^2 = M_2(X) - (M_1(X))^2$$

באיחוד של t קבוצות $X_1, X_2, \dots, X_t$ בגודל $n_1, n_2, \dots, n_t$ המומנט M_k של איחוד הקבוצות X הוא סכום משוקלל המומנטים ה- k -ים.

$$M_k(X) = \sum_{i=1}^t \frac{n_i}{n} M_k(X_i)$$

אקסיומות ההסתברות

(1) תכונות כלליות של פונקציית הסתברות $P(A)$ כאשר A - מאורע כלשהו

Ω - מרחב מאורעות או אוסף כל התוצאות האפשריות של ניסוי או מאורע וודאי.

$$P(\Phi) = 0, \quad P(\Omega) = 1, \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$(2) \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A), \quad P(A) + P(\overline{A}) = 1 \quad \text{כאשר } \overline{A} - \text{מאורע משלים } (A \cup \overline{A} = \Omega)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (3)$$

(4) A, B מאורעות זרים אם $A \cap B = \Phi$ ומתקיים $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
נוסחאות שימושיות נוספות:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) \quad (5)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) \quad , P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) \quad (6) \quad (\text{דה מורגן})$$

קומבינטוריקה

תמורות

$$P_n = n!; \quad P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

בחירות

	עם החזרה	בלי החזרה
סדר חשוב (חליפות)	n^k	$P_n^k = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
סדר לא חשוב (צירופים)		$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

הסתברות מותנית

$P(A/B)$ - קוראים: ההסתברות המותנה של מאורע A כאשר ידוע שהמאורע B התרחש (בקיצור, ההסתברות של A בתנאי B).

$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(B)}, \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

אם A, B מאורעות זרים אז מתקיים $P(A/B) = 0$

אם A, B מאורעות בלתי תלויים אז מתקיים $P(A/B) = P(A)$, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

אם A, B מאורעות תלויים אז מתקיים $P(A/B) \neq P(A)$, $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(A) = P(A/E_1) \cdot P(E_1) + \dots + P(A/E_n) \cdot P(E_n)$$

כאשר $E_1, E_2, \dots, E_n$ מאורעות זרים שאיחודם הוא כל המרחב Ω : $\sum_{i=1}^n P(E_i) = 1$

נוסחת בייז :

$$P(E_1/A) = \frac{P(A/E_1) \cdot P(E_1)}{P(A)} = \frac{P(A/E_1) \cdot P(E_1)}{P(A/E_1) \cdot P(E_1) + \dots + P(A/E_n) \cdot P(E_n)}$$

$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B) \quad \text{נוסחה נוספת :}$$

מומנטים למשתנה בדיד

$$\text{Var}(x) = E(x^2) - (E(x))^2 \quad \text{שונות} \quad , E(x) = \sum x_i P(x_i) \quad \text{תוחלת}$$

תכונות של תוחלת ושונות:

$$E(b \cdot X + a) = b \cdot E(X) + a, \quad \text{Var}(b \cdot X + a) = b^2 \cdot \text{Var}(X), \quad E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

נוסחת התוחלת השלמה

נתונים קבוצה שלמה של מאורעות זרים $\{A_1, \dots, A_n\}$ משתנה מקרי כלשהו אזי:
 $E(X) = E(X|A_1) \cdot P(A_1) + E(X|A_2) \cdot P(A_2) + \dots + E(X|A_n) \cdot P(A_n)$

התפלגות בינומית (ברנולי) $X \sim B(n, p)$

n - מספר ניסויים, p - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, nsמן: $q = 1 - p$.
ההסתברות שמתוך n ניסויים יהיו בדיוק k הצלחות: $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$
תוחלת ושונות של התפלגות בינומית: $E(X) = np$, $\text{VAR}(X) = npq$

התפלגות גיאומטרית (עד הצלחה ראשונה) $X \sim G(p)$

p - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, nsמן: $q = 1 - p$.
ההסתברות שהצלחה הראשונה תתרחש בניסוי מס' k: $P(X = k) = q^{k-1} \cdot p$
 $E(X) = \frac{1}{p}$, $\text{VAR}(X) = \frac{1-p}{p^2}$, $P(X > k) = q^k$, $P(X \leq k) = 1 - q^k$

$$S = a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q} \quad (q < 1) \quad \text{סכום של סדרה הנדסית אינסופית :}$$

התפלגות היפרגאומטרית

באוכלוסיה N פריטים, מתוכם D פריטים מיוחדים. מוציאים מהאוכלוסיה n פריטים ללא החזרה. X = מספר פריטים מיוחדים שהוצאו.

$$P(X = k) = \frac{C_D^k \cdot C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} \quad \text{ההסתברות שמתוך n פריטים יהיו k פריטים מיוחדים :}$$

תוחלת ושונות:

$$E(X) = n \cdot \frac{D}{N} \quad \text{VAR}(X) = n \cdot \frac{D}{N} \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

התפלגות פואסון

התפלגות פואסון עם פרמטר λ : $X \sim P(\lambda)$

λ הוא המספר הממוצע של האירועים ליחידת זמן, $\lambda > 0$

ההסתברות שביחידת הזמן יתרחשו בדיוק k אירועים היא : $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$

תוחלת ושונות : $E(X) = \lambda$, $\text{VAR}(X) = \lambda$

קירוב פואסון לבינומית (עבור n גדול ו p קטן) מציבים $\lambda = np$

משתנה מקרי רציף

$f(x)$ פונקציית צפיפות, $a < x < b$, $F(x)$ פונקציית ההתפלגות.

$$F(b) = 1, F(a) = 0, F'(x) = f(x), F(x) = \int_a^x f(t)dt, \int_a^b f(x)dx = 1$$

$F(x)$ אינה יורדת, כלומר אם : $a \leq c < d \leq b$ אז $F(c) \leq F(d)$

$$P(X < c) = \int_a^c f(x)dx = F(c), P(c < X < d) = \int_c^d f(x)dx = F(d) - F(c)$$

$$E(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx, \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2, E(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx,$$

התפלגות נורמלית (גאוס) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

X הוא משתנה נורמלי עם פרמטרים μ ו- σ , אם פונקציית הצפיפות שלו ניתנת על ידי

סימונים : $E(X) = \mu$, $\text{Var}(X) = \sigma^2$

אם $X \sim N(\mu, \sigma)$ אזי $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

פונקציית התפלגות של X היא : $P(X \leq t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$

כאשר $\Phi(t) = P(Z \leq t)$ היא פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה הנורמלי הסטנדרטי

והיא נתונה בטבלה. תכונות של פונקציית $\Phi(t)$:

$$z_{1-\alpha} = -z_\alpha, P(t_1 < z < t_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1), P(-a < Z < a) = 2\Phi(a) - 1$$

$$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t), P(Z > t) = 1 - P(Z \leq t)$$

סכום והפרש התפלגויות נורמליות:

נתונים $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ משתנים מקריים בלתי תלויים, אזי מתקיים :

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

משפט הגבול המרכזי:

היו $X_1, \dots, X_n$ - משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ ושונותה σ^2 אזי:

$$S \sim N(n \cdot \mu, (\sigma \cdot \sqrt{n})^2) \quad S = \sum X_i;$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right); \quad \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n};$$

קירוב נורמלי למשתנה בינומי:

יהי X משתנה בינומי בעל פרמטרים n ו- p
 כלומר $X \sim B(n, p)$. אזי לכל t ממשי עבור n גדול (לפחות: $n > 30$) מתקיים:

$$q = p - 1; \quad X \sim N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q}^2)$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 + 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

רווח בר-סמך לממוצע כאשר סטיית התקן ידועה:

μ - ממוצע האוכלוסייה, σ^2 - שונות האוכלוסייה, σ - סטיית התקן של האוכלוסייה.
 $\bar{x}$ - ממוצע המדגם, α - רמת המובהקות, $1 - \alpha$ רמת הביטחון, n - גודל המדגם, d - סטיית המדגם.

$$\text{רווח בר-סמך ל- } \mu : \bar{x} \pm \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$$

גודל המדגם - הדרוש כדי שברמת בטחון $1 - \alpha$, הסטייה בין μ לבין $\bar{X}$ (חצי אורך הרווח) לא תעלה על d הוא:

$$d = \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot \sigma}{\sqrt{n}}; \quad n \geq \left\lceil \frac{\left(\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \sigma\right)^2}{d^2} \right\rceil$$

רווח בר-סמך ברמת סמך עבור פרופורציה p של "הצלחות" באוכלוסייה:

$$\hat{p} \pm \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

כאשר $\hat{p} = \frac{X}{n}$ היא פרופורציית ה"הצלחות" במדגם בגודל n.

אם ידוע בוודאות ש- $p < \hat{p} < 0.5$ או $p > \hat{p} > 0.5$ אזי

גודל המדגם המבטיח שברמת סמך $1-\alpha$ הסטייה בין p לבין $\hat{p}$ לא תעלה על

$$d = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \quad \text{והוא:} \quad n \geq \frac{z_{1-\alpha/2}^2 \hat{p}\hat{q}}{d^2}$$

אם לא שוללים את האופציה ש- p קרוב ל-0.5 אזי מתקיים: $n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{2d} \right)^2$

אינטגרציה וגזירה בחלקים:

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

$$[u(x)/v(x)]' = [u'(x)v(x) - v'(x)u(x)]/v^2(x)$$

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int v'(x)u(x)dx$$

דף נוסחאות מורחב

אקסיומות ההסתברות

- (1) תכונות כלליות של פונקציית ההסתברות $P(A)$ כאשר A - מאורע כלשהו
 Ω - מרחב מאורעות או אוסף כל התוצאות האפשריות של ניסוי או מאורע וודאי.
 $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1, 0 \leq P(A) \leq 1$
- (2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, כאשר $\bar{A}$ - מאורע משלים $(A \cup \bar{A} = \Omega)$
 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- (3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- (4) A, B מאורעות זרים אם $A \cap B = \emptyset$ ומתקיים $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- נוסחאות שימושיות נוספות:**
- (5) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
- (6) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$, $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B})$ (דה מורגן)

שיטת ריבוע הקסם:

מציירים ריבוע. בקצה השמאלי כותבים $A, \bar{A}$ ובקצה העליון כותבים $B, \bar{B}$, כך נקבל שתי שורות ושתי עמודות.
 בקצה הימני של השורה של A כותבים $P(A)$,
 בקצה הימני של השורה של $\bar{A}$ כותבים $P(\bar{A})$,
 בקצה התחתון של העמודה של B כותבים $P(B)$,
 בקצה התחתון של העמודה של $\bar{B}$ כותבים $P(\bar{B})$,
 בפינה הימנית התחתונה כותבים 1,
 בארבע המשבצות באמצע כותבים את הערכים:

$$P(A \cap B) \text{ בשורה של } A \text{ ובעמודה של } B$$

$$P(\bar{A} \cap B) \text{ בשורה של } \bar{A} \text{ ובעמודה של } B$$

$$P(A \cap \bar{B}) \text{ בשורה של } A \text{ ובעמודה של } \bar{B}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) \text{ בשורה של } \bar{A} \text{ ובעמודה של } \bar{B}$$

נשים לב שסכום שני המספרים בצד שמאל בכל שורה שווה למספר המופיע בקצה הימני של השורה. סכום שני המספרים למעלה בכל עמודה שווה למספר המופיע בקצה הימני של העמודה.
 אם נתונים שלושה ערכים בריבוע, כך שלא כל השלושה באותה שורה או באותה העמודה, ניתן לחשב את שאר הערכים בעזרתם.

קומבינטוריקה

תמורות

$$P_n = n!; \quad P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

בחירות

	עם החזרה	בלי החזרה
סדר חשוב (חליפות)	n^k	$P_n^k = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
סדר לא חשוב (צירופים)		$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

חישוב של מספר אפשרויות למאורעות שלא יקרו נעשה על ידי הפחתת מספר האפשרויות שהמאורעות כן יקרו מכלל האפשרויות (למשל מספר האפשרויות ששני אנשים לא ישבו ביחד מחשבים על ידי הפחתה מכלל האפשרויות את מספר האפשרויות ששני האנשים כן ישבו ביחד).

חישוב של הסתברות לפעולה מסוימת מתוך כלל הפעולות מחושב על ידי חישוב מספר האפשרויות לפעולה המסוימת חלקי מספר האפשרויות עבור כלל הפעולות.

הסתברות מותנית

$P(A/B)$ - קוראים: ההסתברות המותנה של מאורע A כאשר ידוע שהמאורע B

התרחש (בקיצור, ההסתברות של A בתנאי B).

$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(B)}, \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

אם A, B מאורעות זרים אז מתקיים $P(A/B) = 0$

אם A, B מאורעות בלתי תלויים אז מתקיים $P(A/B) = P(A)$, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

אם A, B מאורעות תלויים אז מתקיים $P(A/B) \neq P(A)$, $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(A) = P(A/E_1) \cdot P(E_1) + \dots + P(A/E_n) \cdot P(E_n)$$

כאשר $E_1, E_2, \dots, E_n$ מאורעות זרים שאיחודם הוא כל המרחב Ω : $\sum_{i=1}^n P(E_i) = 1$

נוסחת בייז:

$$P(E_1/A) = \frac{P(A/E_1) \cdot P(E_1)}{P(A)} = \frac{P(A/E_1) \cdot P(E_1)}{P(A/E_1) \cdot P(E_1) + \dots + P(A/E_n) \cdot P(E_n)}$$

$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B) \quad \text{נוסחה נוספת:}$$

שיטת העצים:

בונים עץ כך שבהתחלה משרטטים n ענפים מסומנים ב- $E_1, E_2, \dots, E_n$ שיוצאים מנקודה מסוימת, וכותבים על כל ענף את ההסתברויות המתאימות $P(E_1), P(E_2), \dots, P(E_n)$. אחר כך, מורידים מקצה של כל אחד מהענפים ענף נוסף המסומן ב- $A|E_1, A|E_2, \dots, A|E_n$ בהתאמה, וכותבים על כל אחד מהענפים החדשים את ההסתברויות $P(A|E_1), P(A|E_2), \dots, P(A|E_n)$. כעת, כדי לחשב $P(A)$, מכפילים כל אחד מהערכים

$P(E_1), P(E_2), \dots, P(E_n)$ בערכים $P(A|E_1), P(A|E_2), \dots, P(A|E_n)$ שמעליו, ומחברים את הערכים מהענפים השונים שהתקבלו.

מומנטים למשתנה בדיד

$$E(x) = \sum x_i P(x_i), \quad \text{שונות} \quad \text{תוחלת}$$

תכונות של תוחלת ושונות:

$$E(b \cdot X + a) = b \cdot E(X) + a, \quad \text{Var}(b \cdot X + a) = b^2 \cdot \text{Var}(X), \quad E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

נוסחת התוחלת השלמה

נתונים קבוצה שלמה של מאורעות זרים $\{A_1, \dots, A_n\}$. X משתנה מקרי כלשהו אזי:

$$E(X) = E(X | A_1) \cdot P(A_1) + E(X | A_2) \cdot P(A_2) + \dots + E(X | A_n) \cdot P(A_n)$$

התפלגות בינומית (ברנולי) $X \sim B(n, p)$

n - מספר ניסויים, p - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, $q = 1 - p$: נסמן

ההסתברות שמתוך n ניסויים יהיו בדיוק k הצלחות: $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

תוחלת ושונות של התפלגות בינומית: $E(X) = np$, $VAR(X) = npq$

"הצלחה בניסוי" היא הפעולה ש- X מודד, ללא קשר למשמעות שלו כדבר טוב (למשל אם רוצים לחשב הסתברות לבחור k מוצרים פגומים מתוך n מוצרים עם החזרה, אזי "הצלחה בניסוי" הוא לבחור מוצר פגום).

התפלגות היפרגיאומטרית

באוכלוסיה N פריטים, מתוכם D פריטים מיוחדים. מוציאים מהאוכלוסיה n פריטים ללא החזרה. X = מספר פריטים מיוחדים שהוצאו.

ההסתברות שמתוך n פריטים יהיו k פריטים מיוחדים: $P(X = k) = \frac{C_D^k \cdot C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$

תוחלת ושונות:

$$E(X) = n \cdot \frac{D}{N} \quad VAR(X) = n \cdot \frac{D}{N} \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

התפלגות גיאומטרית (עד הצלחה ראשונה) $X \sim G(p)$

p - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, $q = 1 - p$: נסמן

ההסתברות שההצלחה הראשונה תתרחש בניסוי מס' k : $P(X = k) = q^{k-1} \cdot p$

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad VAR(X) = \frac{1-p}{p^2}, \quad P(X > k) = q^k, \quad P(X \leq k) = 1 - q^k$$

$$S = a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q} \quad (q < 1) \quad \text{סכום של סדרה הנדסית אינסופית:}$$

התפלגות פואסון

התפלגות פואסון עם פרמטר λ : $X \sim P(\lambda)$

λ הוא המספר הממוצע של האירועים ליחידת זמן, $\lambda > 0$

ההסתברות שביחידת הזמן יתרחשו בדיוק k אירועים היא: $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$

תוחלת ושונות: $E(X) = \lambda$, $VAR(X) = \lambda$

קירוב פואסון לבינומית (עבור n גדול ו- p קטן) מציבים $\lambda = np$

בהתפלגות פואסון חשוב להשתמש בממוצע ליחידת הזמן שרוצים לחשב, ואם בנתון המקורי של הממוצע הוא ליחידת זמן אחר, צריכים לחשב את הממוצע ליחידת הזמן שהתבקשו בשאלה של חישוב ההסתברות (למשל, אם התבקשו לחשב את ההסתברות שאירוע מסוים יתרחש מספר פעמים בשעה, ונתון שהאירוע מתרחש מספר פעמים בממוצע בדקה, צריך לחשב λ שיהיה מספר הפעמים שהאירוע יתרחש מספר הפעמים בממוצע בשעה).

משתנה מקרי רציף

$f(x)$ פונקציית צפיפות, $a < x < b$, $F(x)$ פונקציית ההתפלגות.

$$F(b) = 1, \quad F(a) = 0, \quad F'(x) = f(x), \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \int_a^b f(x) dx = 1$$

$F(x)$ אינה יורדת, כלומר אם: $a \leq c < d \leq b$ אז $F(c) \leq F(d)$.

$$P(X < c) = \int_a^c f(x)dx = F(c), \quad P(c < X < d) = \int_c^d f(x)dx = F(d) - F(c)$$

$$E(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx, \quad Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2, \quad E(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx,$$

התפלגות נורמלית (גאוס) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

X הוא משתנה נורמלי עם פרמטרים μ ו- σ , אם פונקציית הצפיפות שלו ניתנת על ידי

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad E(X) = \mu, \quad Var(X) = \sigma^2.$$

$$\text{אם } X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ אזי } Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) \quad \text{פונקציית התפלגות של } X \text{ היא:}$$

כאשר $\Phi(t) = P(Z \leq t)$ היא פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה הנורמלי הסטנדרטי

והיא נתונה בטבלה. תכונות של פונקציית $\Phi(t)$:

$$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t), \quad P(-a < Z < a) = 2\Phi(a) - 1, \quad P(t_1 < Z < t_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1), \quad Z_{1-\alpha} = -Z_\alpha$$

$$P(Z > t) = 1 - P(Z \leq t) = 1 - \Phi(t), \quad \Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$$

משפט הגבול המרכזי:

היו $X_1, \dots, X_n$ - משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ ושונותה σ^2 אזי:

$$S = \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n \cdot \mu, (\sigma \cdot \sqrt{n})^2)$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \sim N\left(\mu, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right);$$

קירוב נורמלי למשתנה בינומי:

יהי X משתנה בינומי בעל פרמטרים n ו- p

כלומר $X \sim B(n, p)$. אזי לכל t ממשי עבור n גדול (לפחות: $n > 30$) מתקיים:

$$X \sim N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q})^2; \quad q = 1 - p$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 + 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

רווח בר-סמך לממוצע כאשר סטיית התקן ידועה:

μ - ממוצע האוכלוסייה, σ^2 - שונות האוכלוסייה, σ - סטיית התקן של האוכלוסייה.

$\bar{x}$ - ממוצע המדגם, α - רמת המובהקות, $1 - \alpha$ - רמת הביטחון, n - גודל המדגם, d - סטיית המדגם.

$$\text{רווח בר-סמך ל- } \mu: \quad \bar{x} \pm \frac{\left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{a}{2}\right) \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$$

גודל המדגם - הדרוש כדי שברמת בטחון $1 - \alpha$, הסטייה בין μ לבין $\bar{X}$ (חצי אורך הרווח) לא תעלה על d הוא:

$$d = \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot \sigma}{\sqrt{n}} ; n \geq \left\{ \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \sigma}{d} \right\}^2$$

רווח בר-סמך ברמת סמך עבור פרופורציה p של "הצלחות" באוכלוסייה:

$$\hat{p} \pm \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

כאשר $\hat{p} = \frac{X}{n}$ היא פרופורציית ה"הצלחות" במדגם בגודל n.

אם ידוע בוודאות ש- $p < \hat{p} < 0.5$ או $p > \hat{p} > 0.5$ אזי גודל המדגם המבטיח שברמת סמך $1-\alpha$ הסטייה בין p לבין $\hat{p}$ לא תעלה על

$$d = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \text{ והוא: } n \geq \frac{z_{1-\alpha/2}^2 \hat{p}\hat{q}}{d^2}$$

אם לא שוללים את האופציה ש- p קרוב ל- 0.5 אזי מתקיים: $n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{2d}\right)^2$

אינטגרציה וגזירה בחלקים:

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

$$[u(x)/v(x)]' = [u'(x)v(x) - v'(x)u(x)]/v^2(x)$$

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int v'(x)u(x)dx$$

