

אוניברסיטת אריאל בשומרון
מבחן בנושא: הסתברות וסטטיסטיקה

מרצים

ד"ר אפרים שמרלינג מס קורס: 2-4422010-5

ד"ר אליעזר הירשברג מס קורס: 2-4422010-4

ד"ר אלכסנדר קפלונובסקי מס קורס: 2-4422010-1, 2-4422010-2

ד"ר רונן גרדוול מס קורס: 2-4422010-3

מתרגלים

צחי שביט רן סגל אילנה יודובנו דביר רוס אחיה דודוביץ לב קלינר

סמסטר א', מועד ב', תש"ף, 04.03.2020

זמן הבחינה: 150 דקות

מותר להשתמש במחשבון

נא לכתוב בכתב ברור.

יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות הבאות (כל שאלה 20 נקודות)

שאלה 1

א. חברת סקרים נדרשה לבדוק את אחוז המצביעים בעד מועמד A בבחירות לנשיאות ארה"ב. מהו גודל המדגם הנדרש כדי שסטיית המדגם d תהיה לכל היותר 2%. וזאת ברמת ביטחון של 95%.

ב. ידוע שאורך רוח סמך לממוצע μ שווה ל – 10 ורמת הביטחון שווה ל – 0.98. כדי להקטין את אורך הרווח פי 2 יש להגדיל את גודל המדגם ב – 210. מצא את סטיית התקן σ .

פתרון:

א.

$$n \geq \left(\frac{z_{0.975}}{2d} \right)^2 = \left(\frac{1.96}{2 \cdot 0.02} \right)^2 = 2401$$

ב.

$$\begin{cases} 5 = \frac{z_{0.99} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \\ 2.5 = \frac{z_{0.99} \cdot \sigma}{\sqrt{n+210}} \end{cases}$$

$$2 = \sqrt{\frac{n+210}{n}}$$

$$n = 70$$

$$\sigma = \frac{5\sqrt{n}}{z_{0.99}} = \frac{5\sqrt{70}}{2.33} = 17.95$$

שאלה 2

מסדרים שורה של 8 ספרים על מדף בסדר אקראי. 2 מתוכם הם ספרי ביולוגיה.

א. מה ההסתברות שהספרים יהיו מונחים כך, שבין שתי הביולוגיה יהיה

בדיוק ספר אחד מסוג אחר?

ב. מה ההסתברות שספרים יהיו מונחים כך, שבין שתי ספרי הביולוגיה יהיו מונחים לפחות 5 ספרים מסוג אחר?

פתרון:

א.

$$p = P(X=1) = \frac{6! \cdot 2! \cdot P_6^1}{8!} = 0.214$$

ב.

$$p = P(X=5) + P(X=6) = \frac{2! \cdot 2! \cdot P_6^5 + 1! \cdot 2! \cdot P_6^6}{8!} = 0.107$$

שאלה 3

נתונה פונקציה הצפיפות של משתנה מקרי X

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1-x^4), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

א. מצא/י את הקבוע c

ב. מצא/י את התוחלת $E[X]$ ואת השונות $\text{Var}[X]$.

ג. מצא/י את פונקצית התפלגות מצטברת של X .

ד. חשבו: $P(|X| < 0.5 / X < 0.25)$

פתרון:

א.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = c \int_{-1}^1 (1-x^4) dx = c \left(x - \frac{x^5}{5} \right) = c \frac{8}{5} = 1 \Rightarrow c = \frac{5}{8}$$

ב.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-1}^x \frac{5}{8}(1-t^4) dt = \frac{5}{8} \left(t - \frac{t^5}{5} \right)_{-1}^x = 1 \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, x \leq -1 \\ \frac{5}{8} \left(x - \frac{x^5}{5} \right) + \frac{1}{2}, -1 < x \leq 1 \\ 1, x > 1 \end{cases}$$

ג.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{5}{8} x (1-x^4) dx = 0$$

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{5}{8} x^2 (1-x^4) dx = \frac{5}{21}$$

ד.

$$P(|X| < 0.5 | X < 0.25) = \frac{P(-0.5 < X < 0.25)}{P(X < 0.25)} =$$

$$\frac{F(0.25) - F(-0.5)}{F(0.25)} = \frac{0.65613 - 0.12359}{0.65613} = 0.708$$

שאלה 4

למשתנה מקרי X , אשר התפלגותו נורמלית, יש ממוצע שהוא פי 12 מסטיית התקן שלו. ההסתברות ש- X יקבל ערך גדול מ-60 היא 0.9.

- חשב $P(X < 50)$
- חשב $P(64 < X < 74)$
- מצא את המספר K כך שמתקיים $P(X > K) = 0.8$
- נלקח מדגם בגודל 100 מתוך X . מה ההסתברות שממוצע של המדגם נמצא בין 66 ל-68?

פיתרון:

$$\begin{cases} \mu = 12\sigma \\ P(X > 60) = 0.9 \end{cases}$$

$$\Phi\left(\frac{60 - 12\sigma}{\sigma}\right) = 0.1$$

$$\frac{60 - 12\sigma}{\sigma} = z_{0.1} = -1.28$$

$$\mu = 67.2, \quad \sigma = 5.60$$

א.

$$P(X < 50) = \Phi\left(\frac{50 - 67.2}{5.60}\right) = \Phi(-3.07) = 0.0011$$

ב.

$$\begin{aligned} P(64 < X < 74) &= P(X < 74) - P(X < 64) = \Phi\left(\frac{74 - 67.2}{5.60}\right) - \Phi\left(\frac{64 - 67.2}{5.60}\right) = \\ &= \Phi(1.21) - \Phi(-0.57) = 0.8869 - 0.2843 = 0.6026 \end{aligned}$$

ג.

$$\begin{aligned} P(X > K) &= 0.8 \implies P(X < K) = 0.2 \\ \Phi\left(\frac{K - 67.2}{5.60}\right) &= 0.2 \implies \frac{K - 67.2}{5.60} = z_{0.2} = -0.84 \\ K &= 62.50 \end{aligned}$$

ד.

$$\begin{aligned} P(66 < \bar{X} < 68) &= P(\bar{X} < 68) - P(\bar{X} < 66) = \Phi\left(\frac{68 - 67.2}{5.60/\sqrt{100}}\right) - \Phi\left(\frac{66 - 67.2}{5.60/\sqrt{100}}\right) = \\ &= \Phi(1.43) - \Phi(-2.14) = 0.9236 - 0.0162 = 0.9074 \end{aligned}$$

שאלה 5

בחנות מכולת השכונתית 20% מהלחמניות הן ממאפיה א', והיתר ממאפיה ב'. התפלגות משקל לחמניה (בגרמים) היא נורמלית עם תוחלת 100 ושונות 25 במאפיה א', ותוחלת 90 ושונות 100 במאפיה ב'.

- א. (10 נק') אם צרכן בוחר לחמניה באופן מקרי מהמדף, מה ההסתברות שמשקלה יעלה על 100 גרם?
ב. (10 נק') אם צרכן בוחר לחמניה ומסתבר שמשקלה עולה על 100 גרם, מה ההסתברות שהיא ממאפיה

פיתרון:

נסמן

A_1 - הלחמניה יוצרה במאפיה א', $P(A_1) = 0.2$

A_2 - הלחמניה יוצרה במאפיה ב', $P(A_2) = 0.8$

B - משקל לחמניה יעלה על 100 גרם

משקל לחמניה במאפיה א', $X \sim N(100, 25)$ - ו- Y - משקל לחמניה במאפיה ב' $Y \sim N(90, 100)$.

$$P(B / A_1) = P(X > 100) = 1 - \Phi\left(\frac{100 - 100}{5}\right) = 0.5$$

$$P(B / A_2) = P(Y > 100) = 1 - \Phi\left(\frac{100 - 90}{10}\right) = 0.1587$$

א. לפי משפט הסתברות השלמה:

$$P(B) = P(B / A_1) \cdot P(A_1) + P(B / A_2) \cdot P(A_2) = 0.5 \cdot 0.2 + 0.1587 \cdot 0.8 = 0.2269$$

ב. לפי במשפט בייס:

$$P(A_1 / B) = \frac{P(B / A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.2}{0.2269} = 0.4406$$

שאלה 6

בקורס מסוים יש 3 קבוצות מקבילות. 30 סטודנטים (מתוכם 20 בנים ו-10 בנות) ירשמו באופן אקראי לקבוצות הללו, כך שבכל קבוצה יהיו 10 סטודנטים. מה ההסתברות שבאף אחת משלושת הקבוצות לא יהיו יותר בנות מאשר בנים?

פיתרון:

מספר בנות בכו קבוצה מתפלג חיפרגאומטרית $X \sim Hyp(30, 10, 10)$

$$P(X > 5) = \frac{C_{10}^6 \cdot C_{20}^4 + C_{10}^7 \cdot C_{20}^3 + C_{10}^8 \cdot C_{20}^2 + C_{10}^9 \cdot C_{20}^1 + C_{10}^{10} \cdot C_{20}^0}{C_{30}^{10}} = 0.0387$$

ההסתברות שבאף אחת משלושת הקבוצות לא יהיו יותר בנות מאשר בנים

$$p = 1 - 3 \cdot 0.0387 = 0.8839$$

בהצלחה !