

אוניברסיטת אריאל בשומרון

מבחן בקורס : הסתברות וסטטיסטיקה

מועד ב' סמסטר ב', שנה"ל תשפ"א 22/07/2021

מספר הקורס 4422010-5, 4422010-4

מרצים: ד"ר אפריים שמרלינג, ד"ר אלכסנדר קפלונובסקי

מתרגל: מר רומן גילגור

הוראות כלליות:

1. יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות.
2. נא לסמן על כריכת המחברת איזה שאלות בחרת.
3. כל תשובה חייבת בנימוקים ברורים ומסודרים.
4. מחשבון כיס רגיל.
5. משך הבחינה : 150 דקות.

שאלה 1

- בשנה האחרונה בעיירה מסוימת 18 אחוז מהנהגים היו מעורבים בתאונת דרכים. 20 אחוז מהנהגים בעיירה הם נהגים צעירים 30 אחוז מתוך הנהגים הצעירים היו מעורבים בתאונת דרכים.
- א. איזה אחוז מכלל הנהגים הם נהגים צעירים שהיו מעורבים בתאונת דרכים.
 - ב. איזה אחוז מכלל הנהגים אינם נהגים צעירים שהיו מעורבים בתאונת דרכים.
 - ג. אדם נבחר באופן מקרי והתברר שהיה מעורב בתאונת דרכים השנה, מהי ההסתברות שהוא לא נהג צעיר?
 - ד. האם המאורעות "אדם היה מעורב בתאונת דרכים" ו-"אדם הוא נהג צעיר" הם מאורעות בלתי תלויים?

פיתרון:

	B נהגים צעירים	$\bar{B}$ לא נהגים צעירים	
A מעורבים בתאונת דרכים	0.06	0.12	0.18
$\bar{A}$ לא מעורבים בתאונת דרכים	0.14	0.68	0.82
	0.20	0.80	1

א. $P(A \cap B) = 0.20 \cdot 0.03 = 0.06 = 6\%$

ב. $P(A \cap \bar{B}) = 0.12 = 12\%$

ג. $P(\bar{B} / A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{0.12}{0.18} = 0.67$

ד. תלויים $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$

שאלה 2

בבחינה 10 שאלות, לכל שאלה 3 תשובות אפשריות שרק 1 מהן נכונה. תשובה נכונה מעניקה 10 נקודות. תלמיד שלא התכוון לבחינה מנחש את תשובותיו. משתנה מקרי X הוא ממוצע הציונים של 100 סטודנטים שלא התקוננו למבחן.

- א. מצא את תוחלת ושונות של X
- ב. מצא את הסתברות שיותר מסטודנט אחד מתוך ה-100 יעבור את המבחן (ציון מעבר 60)

פתרון:

א.

נסמן M – מספר תשובות נכונות של סטודנט

$$M \sim \text{Bin}\left(10, \frac{1}{3}\right)$$

$$E[M] = 10 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3} = 3.33$$

$$\text{Var}[M] = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{20}{9} = 2.22$$

נסמן Y – ציון (מספר הנקודות שקיבל סטודנט)

$$Y = 10 \cdot M$$

$$E[Y] = E[10M] = 10E[M] = 33.33$$

$$\text{Var}[Y] = \text{Var}[10M] = 100\text{Var}[M] = 100 \cdot 2.22 = 222.22$$

נסמן X – ממוצע $\bar{Y}_{100}$ ציונים של 100 סטודנטים

$$X \sim N\left(33.33, \frac{222.22}{100}\right)$$

$$E[X] = 33.33$$

$$\text{Var}[X] = 2.22$$

ב. הסתברות שסטודנט יעבור את המבחן = הסתברות שסטודנט ענה ללפחות 6 שאלות מ-10

$$M \sim \text{Bin}\left(10, \frac{1}{3}\right)$$

$$p = P(M \geq 6) = P(M = 6) + P(M = 7) + P(M = 8) + P(M = 9) + P(M = 10) =$$

$$= C_{10}^6 \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^4 + C_{10}^7 \left(\frac{1}{3}\right)^7 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + C_{10}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^8 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + C_{10}^9 \left(\frac{1}{3}\right)^9 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + C_{10}^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 0.0735$$

Z – מספר הסטודנטים שעברו את המבחן

$$Z \sim \text{Bin}(100, 0.0735)$$

$$P(Z > 1) = 1 - P(Z = 0) - P(Z = 1) = 1 - C_{100}^0 0.0735^0 0.9265^{100} - C_{100}^1 0.0735^1 0.9265^{99} = 0.99947$$

שאלה 3

א. באוכלוסיה מסוימת יש 51% נשים ו-49% גברים. מה ההסתברות שבמדגם של 100 אנשים יהיו יותר גברים מנשים?

ב. חוקר התבקש לבנות רווח בר סמך למשקל ממוצע של תושבי אריאל, כך שהסטיית המדגם לא תעלה על שתי קג'. מהו גודל המדגם שעליו לבדוק אם $\sigma = 50$ ורמת הביטחון הוא 0.95?

פתרון:

א.

$$X \sim \text{Bin}(100, 0.49)$$

$$P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50) = 1 - \Phi\left(\frac{50 + 0.5 - 100 \cdot 0.49}{\sqrt{100 \cdot 0.49 \cdot 0.51}}\right) = 1 - \Phi(0.300) = 0.3821$$

ב.

$$n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{d}\right)^2 = \left(\frac{1.96 \cdot 50}{2}\right)^2 = 2401$$

שאלה 4

נתונה פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי X

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1-x^4), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & (-\infty < x \leq -1) \cup (1 \leq x < \infty) \end{cases}$$

א. מצא/י את הקבוע c

ב. מצא/י את התוחלת $E[X]$ ואת השונות $\text{Var}[X]$.

ג. מצא/י את פונקציית התפלגות מצטברת של X .

ד. חשב/י: $P(|X| < 0.5 / X < 0.25)$

פתרון:

א.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = c \int_{-1}^1 (1-x^4) dx = c \left(x - \frac{x^5}{5} \right) = c \frac{8}{5} = 1 \Rightarrow c = \frac{5}{8}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-1}^x \frac{5}{8} (1-t^4) dt = \frac{5}{8} \left(t - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_{-1}^x \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{5}{8} \left(x - \frac{x^5}{5} \right) + \frac{1}{2}, & -1 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

ג.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{5}{8} x (1-x^4) dx = 0$$

$$\text{Var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{5}{8} x^2 (1-x^4) dx = \frac{5}{21}$$

ד.

$$P(|X| < 0.5 / X < 0.25) = \frac{P(-0.5 < X < 0.25)}{P(X < 0.25)} =$$

$$\frac{F(0.25) - F(-0.5)}{F(0.25)} = \frac{0.65613 - 0.12359}{0.65613} = 0.72019$$

שאלה 5

- א. בכד ישנם 10 כדורים לבנים ו-20 כדורים שחורים. מוציאים את הכדורים באקראי מהכד ללא החזרה בזה אחר זה עד להסרת 3 כדורים לבנים. למה שווה ההסתברות שיוציאו בדיוק 9 כדורים?
- ב. מוצאים את הכדורים מאותו כד עם החזרה עד שיוציא כדור לבן בפעם השלישית, למה שווה ההסתברות שיוציאו בדיוק 9 כדורים?

פתרון:

- א. נסמן X - מקרי משתנה: מספר כדורים לבנים שיצו מין הכד ללא החזרה לפני שיוציא כדור האחרון (ס"כ יוצאו 8 כדורים)

$$X \sim H(30, 10, 8)$$

נסמן ב-A מאורע שמתוך 8 כדורים נמצאו 2 כדורים לבנים

$$P(A) = P(X = 2) = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{20}^6}{C_{30}^8}$$

נסמן ב-B מאורע שכדור ה-9 הוא לבן. אחרי שיוציאו מהכד 8 כדורים מיתוכם 2 לבנים בכד נשארו 8 כדורים לבנים מתוך 22. לכן

$$P(B) = \frac{8}{22}$$

ההסתברות שהוציאו בדיוק 9 כדורים

$$P(A \cap B) = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{20}^6}{C_{30}^8} \cdot \frac{8}{22} = 0.1084$$

- ב. נסמן X - מקרי משתנה: מספר כדורים לבנים שיצו מין הכד עם החזרה לפני שיוציא כדור האחרון (ס"כ יוצאו 8 כדורים)

$$X \sim \text{Bin}\left(8, \frac{10}{30}\right)$$

נסמן ב-A מאורע שמתוך 8 כדורים נמצאו 2 כדורים לבנים

$$P(A) = P(X = 2) = C_8^2 \left(\frac{10}{30}\right)^2 \left(\frac{20}{30}\right)^6 = 0.273$$

נסמן ב-B מאורע שכדור ה-9 הוא לבן. בגלל שמוציאים כדורים עם החזרה הסתברות של כדור לבן תמיד שווה ל-

$$P(B) = \frac{10}{30}$$

ההסתברות שהוציאו בדיוק 9 כדורים

$$P(A \cap B) = C_8^2 \left(\frac{10}{30}\right)^2 \left(\frac{20}{30}\right)^6 \cdot \frac{10}{30} = 0.0910$$

שאלה 6

ישנם 2 מטרות, מטרה של איציק ומטרה של שמוליק.

הסיכוי של איציק לפגוע היא $\frac{1}{3}$, והסיכוי של שמוליק לפגוע היא $\frac{1}{2}$,

הם החליטו לעשות את התחרות הבאה:

שניהם יורים בו זמנית (כל אחד למטרה שלו). אם שנייהם פוגעים, או שנייהם לא פוגעים – ממשיכים לעוד סיבוב. בפעם הראשונה שאחד פוגע ואחד לא – המשחק יסתיים והמנצח הוא מי שפגע.

יהי משתנה מקרי X מספר הסיבובים ששיחקו

א. מצא את ההסתברות שיהיו לפחות 9 סיבובים במשחק?

ב. מצא את ההסתברות שהמשחק יסתיים בסיבוב ה-9 בניצחון של איציק.

פתרון:

הסתברות לתיקו (שנייהם פוגעים, או שנייהם לא פוגעים)

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

מספר סיבובים

$$X \sim G\left(\frac{1}{2}\right)$$

א. יהיו לפחות 9 סיבובים במשחק

$$P(X \geq 9) = P(X > 8) = \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256} = 0.00390$$

ב. נסמן ב-A מאורע שהתקיימו 8 פעמים תיקו

$$P(A) = P(X = 8) = \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

נסמן ב-B מאורע שאיציק פוגע במטרה במשחק ה-9 ושמוליק לא פוגע

$$P(B) = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

הסתברות המשחק יסתיים בסיבוב ה-9 בניצחון של איציק

$$P(A \cap B) = \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{1536} = 0.000651$$