

תאריך: 14.08.06
סמסטר ב' תשס"ז

מבחן ב"הסתברות וסטטיסטיקה" – 20019
המרצה: אלכסנדר קפלונובסקי

* * *

שאלה 1

ביטוח טיפולי שיניים, מכסה 3 סוגי טיפולים: אורתודנטיה (O), סתימות (F), ועקירות (E).
הסיכוי כי מבוטח, הרוכש ביטוח טיפולי שיניים יזדקק ל-
- אורתודנטיה היא $(1/2)$
- אורתודנטיה או סתימות היא $(2/3)$.
- אורתודנטיה או עקירות היא $(3/4)$.
הנח כי אין תלות בין 3 סוגי הטיפולים.
חשב את הסיכוי, כי מבוטח הרוכש ביטוח טיפולי שיניים יזדקק לעקירות או לסתימות.

פיתרון:

$$P(O) = 0.5$$

$$P(O \cup F) = \frac{2}{3} = P(O) + P(F) - P(O \cap F) \underset{\text{ת"ב}}{=} P(O) + P(F) - P(O) \cdot P(F) =$$

$$0.5 + P(F) - 0.5 \cdot P(F) \Rightarrow P(F) = \frac{1}{3}$$

$$P(O \cup E) = \frac{3}{4} = P(O) + P(E) - P(O \cap E) \underset{\text{ת"ב}}{=} P(O) + P(E) - P(O) \cdot P(E) =$$

$$0.5 + P(E) - 0.5 \cdot P(E) \Rightarrow P(E) = \frac{1}{2}$$

$$P(F \cup E) = P(F) + P(E) - P(F \cap E) \underset{\text{ת"ב}}{=} P(F) + P(E) - P(F) \cdot P(E) =$$

$$\frac{1}{3} + 0.5 - 0.5 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow P(F \cup E) = \frac{6}{9}$$

שאלה 2

אצל סבתא הופיע נגע בעור, אשר בצורתו יכול להיות סרטן העור ב 1%-מהמקרים. בדיקת מעבדה עם רגישות (אחוז החולים שיזוהו נכונה מכלל החולים) של 90% וסגוליות (אחוז בריאים שיזוהו נכונה מכלל הבריאים) של 80% חוזרת חיובית. מה הסבירות שאכן קיים סרטן העור?

פיתרון:

$$P(D+)=0.01$$

$$P(T+/D+)=0.9$$

$$P(T-/D-)=0.8$$

Bayes:

$$P(D+/T+)=P(T+/D+)*P(D+)/P(T+)=$$

$$(P(T+/D+)*P(D+))/(P(T+/D+)*P(D+))+P(T+/D-)*P(D-)) =$$

$$0.9*0.01/(0.9*0.01+0.2*0.99)=0.009/0.207=0.0434$$

שאלה 3

כדי לבדוק אם מטבע הוא תקין מטילים אותו 8 פעמים. אם הוא נופל על "עץ" שלוש, ארבע או חמש פעמים מחליטים שהוא תקין, אחרת מחליטים שהוא מזויף. מה היא רמת המובהקות α של המבחן הנתון?

פיתרון:

$$1-\alpha=(C(8,3)+C(8,4)+C(8,5))/2^8=1-182/256=74/256$$

שאלה 4

X הוא מ"מ בעל פונקצית ההתפלגות המצטברת הבאה:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t^2 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ t + a & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ \frac{3}{4} + b(t-1) & 1 \leq t < 2 \\ c & t \geq 2 \end{cases}$$

- מצא/י את הקבועים a, b, c
- מצא/י את פונקצית הצפיפות.
- מצא/י את התוחלת $E[X]$ ואת השונות $\text{Var}[X]$.
- חשב/י: $P(X < 1.5/X > 0.25)$

פיתרון:

$$\begin{aligned}c &= 1; \\ 3/4 + b(t-1) &= 1 \text{ when } t=2; \\ b &= 1/4 \\ t+a &= 3/4 \text{ when } t=1; \\ a &= -1/4;\end{aligned}$$

$$F_{\omega}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^2 & 0 < t < 1/2 \\ t - 1/4 & 1/2 < t < 1 \\ 1/2 + t/4 & 1 < t < 2 \\ 1 & t > 2 \end{cases}$$

$$f_{\omega}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & 0 < t < 1/2 \\ 1 & 1/2 < t < 1 \\ 1/4 & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

$$E[x] = \int_0^{1/2} 2x^2 dx + \int_{1/2}^1 x dx + \int_1^2 1/4 * x dx = 2/3 * x^3|_0^{1/2} + x^2/2|_{1/2}^1 + x^2/8|_1^2 =$$

$$= 1/12 + 1/2 - 1/8 + 1/2 - 1/8 = 5/6$$

$$Var[x] = \int_0^{1/2} 2x^3 dx + \int_{1/2}^1 x^2 dx + \int_1^2 1/4 * x^2 dx - (E[x])^2 =$$

$$1/2 * x^4|_0^{1/2} + x^3/3|_{1/2}^1 + x^3/12|_1^2 - (5/6)^2 =$$

$$1/32 + 1/3 - 1/24 + 2/3 - 1/12 - 25/36 = 0.21181$$

$$P(x < 1.5/x > 0.25) = \frac{P(x < 1.5/x > 0.25)}{P(x > 0.25)} = \frac{P(0.25 < x < 1.5)}{P(x > 0.25)}$$

$$\frac{F(1.5) - F(0.25)}{1 - F(0.25)} = \frac{7/8 - 1/16}{1 - 1/16} = 13/15 = 0.86667$$

שאלה 5

- מיליונים של ילדים אמריקאים מקבלים חיסונים נגד חצבת בכל שנה. דבר זה מונע את מליון או יותר המקרים שבהם חלו ילדים בחצבת לפני הנהגת החיסון אבל לעיתים מביא לתופעות לוואי. בכל שנה ניתן לצפות ל-121 מקרים בהם מתקיימים סיבוכים רציניים כתוצאה מהחיסון.
- א. מהו טיפוס ההתפלגות (לדוגמא: אחידה, מעריכית, בינומית, פואסונית, נורמלית, סטודנט T, חי בריבוע וכו')?
- ב. מהי ההסתברות שקרות 130 מקרים או פחות בשנה? (לחשב בקירוב)
- ג. נניח שיונהג חיסון חדש האמור להיות בטוח יותר לשימוש. אם ישנם 100 מקרים בשנה הבאה, האם ניתן להסיק בביטחון של 95% שהחיסון החדש אכן בטוח יותר?

Answer:

A. This is a Poisson distribution with ($\lambda=121$). If you prefer, you can call it a binomial distribution with n =several million and $p=121/n$. But that's essentially the same as Poisson.

B: Use the normal approximation. $\mu=\lambda=121$; $\sigma=11$, $z=(130.5-121)/11 = 0.864$ (don't forget the continuity correction!) $\Phi(z)=\Phi(0.864)=0.806$.

C. Yes! The null hypothesis is that the two vaccines are equally safe ($\lambda = 121$), while the alternate hypothesis is that the new vaccine is safer ($\lambda < 121$). We compute using the null hypothesis: $z = (100.5 - 121)/11 = -1.864$, $\Phi(z) = 0.031$. In other words, if the null hypothesis is true, then there is only a 3.1% chance of getting 100 or fewer cases. With 95% confidence, we reject the null hypothesis in favor of the alternative that the new vaccine is safer.

שאלה 6

במדגם אקראי של 20 נוסעים, בקו עירוני בחיפה, נמצא כי זמן ההמתנה הממוצע לאוטובוס הוא 9.3 דקות עם אומדן לסטיית התקן של 6.2 דקות.

- א. בנה רווח סמך, ברמת סמך של 90%, לתוחלת זמן ההמתנה של נוסע לאוטובוס.
 ב. בנה רווח סמך, ברמת סמך של 90%, לסטיית התקן של זמן ההמתנה של נוסע לאוטובוס.

פיתרון:

$$\bar{x}_{20} = 9.3, \quad s = 6.2, \quad n = 20 \quad \text{נתון:}$$

הנחה: זמן ההמתנה של נוסע לאוטובוס הוא מ"מ נורמלי.

(א) רווח סמך לתוחלת זמן ההמתנה, ברמת סמך של 90%, נתון על-ידי:

$$t_{(19)}^{(0.95)} = 1.729 \rightarrow$$

$$\mu \in \left[9.3 \pm 1.729 \cdot \frac{6.2}{\sqrt{20}} \right] = [6.903, 11.697]$$

(ב) רווח סמך לסטיית התקן, ברמת סמך של 90%, נתון על-ידי:

$$\chi^2_{(19)}^{(0.95)} = 30.14, \quad \chi^2_{(19)}^{(0.05)} = 10.12 \rightarrow$$

$$\sigma \in \left[\sqrt{\frac{19 \cdot 6.2^2}{30.14}}, \sqrt{\frac{19 \cdot 6.2^2}{10.12}} \right] = [4.923, 8.495]$$