

## מבחן בקורס – "הסתברות וסטטיסטיקה" - (20019)

מרצים: ד"ר ולדימיר אייליבסקי, ד"ר אלכס קפלונובסקי,

אחראי על הקורס: ד"ר אלעד שגב.

תאריך המבחן: תשע"ה סמסטר קיץ מועד א' 21.9.2015

הוראות המבחן:

- משך המבחן 3 שעות.
- עליך לפתור סה"כ 4 (ארבע) שאלות מתוך 5. הסברי/ ונמקי/ את תשובותיך. תשובה מספרית יש לתת בשלוש ספרות אחרי הנקודה.
- נא לרשום בראש המחברת אלו שאלות יש לבדוק.
- חומר עזר מוגבל – חומר לימוד מהרצאות ודפי נוסחאות סטנדרטיים מודפסים מאתר הקורס בכתובת: <http://www.hit.ac.il/ac/files/Eugene.Kanzieper/teaching/ps/ps.htm>
- מותר להשתמש במחשבון פשוט.

### שאלה 1

דני יוצא לעבודה בין 8 לבין 11 בבוקר באופן מקרי. לזמן יציאתו יש התפלגות רציפה אחידה. אם דני יוצא בין 8 ל 8:30 אז הוא נוסע בדרך A, אם הוא יוצא בין 8:30 ל 10 אז הוא נוסע בדרך B ואם הוא יוצא בין 10 ל 11 אז הוא נוסע בדרך C. הסתברויות שדני מאחר בתנאי שהוא נוסע בדרכים A, B, ו- C שוות 0.4, 0.2 ו- 0.1 בהתאמה.

א. חשבו את ההסתברות שדני מאחר לעבודה.

פתרון:

נסמן:

A - נוסע בדרך A

B - נוסע בדרך B

C - נוסע בדרך C

D - מאחר

נתון:

$$\begin{aligned}P(D|A) &= 0.4, & P(D|B) &= 0.2, & P(D|C) &= 0.1 \\p(A) &= \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6}, & p(B) &= \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}, & p(C) &= \frac{1}{3} \\p(D) &= P(D|A)p(A) + P(D|B)p(B) + P(D|C)p(C) = \\&= 0.4 \cdot \frac{1}{6} + 0.2 \cdot \frac{1}{2} + 0.1 \cdot \frac{1}{3} = 0.2\end{aligned}$$

ב. ידוע שביום ראשון דני היגיע לעבודה באיחור. מהי ההסתברות שהוא יצא בין 8 ל 8:30 ונסע בדרך A?

פתרון:

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)p(A)}{p(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.1666}{0.2} = 0.333$$

מבחן בקורס הסתברות למהנדסים, סמסטר ב, מועד א  
 קורס מספר 20019, מרצים: ד"ר אלכס קפלונובסקי וד"ר אלעד שגב

ג. בכל איחור שלישי של דני לעבודה, הוא קונה עוגה למשרד. מהי תוחלת של מספר ימי העבודה עד שעליו לקנות עוגה? מהי ההסתברות שמספר ימי העבודה עד שדני יקנה את העוגה שווה ל 10 ? (5 נק')

$$X \sim \text{NegBin}\{k = 3, p = 0.2\}$$

$$p(X = 10) = C_9^2 (0.2)^3 (0.8)^7 = 0.06$$

$$E[X] = \frac{k}{p} = \frac{3}{0.2} = 15$$

## שאלה 2

- בחדר ישנם שני כדים. בכד הראשון 5 כדורים מתוכם 3 אדומים והשאר לבנים, בכד השני 4 כדורים מתוכם 2 אדומים והשאר לבנים.
- א. אם נבחר כד באקראי ונוציא ממנו כדור אחד, מהי ההסתברות שיהיה זה כדור אדום? (10 נק')
- ב. במידה ויילקח מהכד הראשון באקראי כדור אחד ויוכנס לכד השני. לאחר מכן יוציאו מהכד השני כדור אחד. מהי ההסתברות שכדור זה הוא אדום? (10 נק')
- ג. מהכד הראשון נלקחו באקראי 2 כדורים בלי החזרה והוכנסו לכד השני. לאחר מכן הוצא מהכד השני כדור אחד. אם ידוע כי כדור שהוצא מהכד השני הוא אדום, מהי ההסתברות שבהוצאה מהכד הראשון הוצאו כדור אדום אחד וכדור לבן אחד? (5 נק')

פיתרון:

א. נסמן:  $A_1$  – נבחר כד ראשון,  $A_2$  – נבחר כד שני

$$p(A_1) = p(A_2) = 0.5$$

נסמן  $B$  – יצא כדור אדום

$$p(B) = p(B|A_1)p(A_1) + p(B|A_2)p(A_2)$$

$$p(B) = \frac{3}{5} \cdot 0.5 + \frac{2}{4} \cdot 0.5 = 0.55$$

ב. נסמן  $R$  – מהכד הראשון נלקח כדור אדום,  $W$  – נלקח כדור לבן

$$p(R) = \frac{3}{5}, \quad p(W) = \frac{2}{5}$$

נסמן  $B$  – יצא כדור אדום מהכד השני

$$p(B) = p(B|R)p(R) + p(B|W)p(W)$$

$$p(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1+2}{4+1} + \frac{2}{5} \cdot \frac{0+2}{4+1} = 0.52$$

ג.

$$p = \frac{C_3^2 \cdot C_2^0}{C_5^2} \cdot \frac{2+2}{4+2} + \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2} \cdot \frac{2+1}{4+2} + \frac{C_3^0 \cdot C_2^2}{C_5^2} \cdot \frac{2+0}{4+2} = 0.533$$



מבחן בקורס הסתברות למהנדסים, סמסטר ב, מועד א  
קורס מספר 20019, מרצים: ד"ר אלכס קפלונובסקי וד"ר אלעד שגב

$$p = \frac{C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot \frac{2+1}{4+2}}{C_5^2} = \frac{0.533}{0.533} = 0.562$$

### שאלה 3

לבית עם 6 חדרים נכנסו 8 ילדים, מתוכם 3 בנות ו 5 בנים. הילדים התפזרו באופן אקראי בין החדרים כך שבכל חדר יכול להיות מספר כלשהו של ילדים.  
(א) בכמה דרכים יכולים 8 הילדים להסתדר ב 6 חדרים שונים? (10 נק')  
פתרון:

$$|\Omega| = 6^8 = 1679616$$

(ב) מהי ההסתברות שבחדר כלשהו יהיו 3 בנות ובכל חדר מהחדרים האחרים יהיה בדיוק בן אחד? (10 נק')  
פתרון:

$$\frac{6 \cdot 5!}{6^8} = 4.29 \cdot 10^{-4}$$

(ג) מהי ההסתברות שבכל חדר לא יהיה יותר מבן אחד ולא יותר מבת אחת? (5 נק')

פתרון:

פתרון:

מרחב מדגם: כל האפשרויות לפזר 8 ילדים ב 6 חדרים – תוצאה של סעיף א'.

מספר אפשרויות לפזר 5 בנים ב 6 חדרים כך שלא יהיה בחדר יותר מבן אחד  $P_6^5$   
מספר אפשרויות לפזר 3 בנות ב 6 חדרים כך שלא יהיה בחדר יותר מבת אחת  $P_6^3$   
על פי עיקרון הכפל מספר אפשרויות למאורע הנדרש A:

$$|A| = P_6^3 P_6^5 = 86400$$
$$p(A) = \frac{86400}{1679616} = 0.2896$$

### שאלה 4

לשליש מהאוכלוסייה יש שתי מכוניות, לשליש יש רק מכונית אחת וליתר אין מכונית כלל. בחרים אדם באופן מקרי ושואלים אותו למספר המכוניות שיש לו. הוא עונה תשובה נכונה בהסתברות 0.5 ומשקר בהסתברות 0.5, כאשר לכל אחת משתי התשובות השקריות העומדות לרשותו יש אותה הסתברות.  
יהי X – מספר המכוניות שיש לאדם.

מבחן בקורס הסתברות למהנדסים, סמסטר ב, מועד א  
 קורס מספר 20019, מרצים: ד"ר אלכס קפלונובסקי וד"ר אלעד שגב  
**Y – מספר המכוניות שענה שיש לו.**

- א. (10 נק') בנה/י את פונקצית ההסתברות המשותפת של X ו-Y.  
 ב. (10 נק') חשבי/ את התוחלת והשונות ל-X ול-Y.  
 ג. (5 נק') חשבי/ את מקדם המתאם בין X ל-Y.

פיתרון:

y\x	0	1	2	P(y)
0	1/6	1/12	1/12	1/3
1	1/12	1/6	1/12	1/3
2	1/12	1/12	1/6	1/3
P(x)	1/3	1/3	1/3	1

$$E[X]=0 * 1/3 + 1 * 1/3 + 2 * 1/3 = 1$$

$$E[Y]=0 * 1/3 + 1 * 1/3 + 2 * 1/3 = 1$$

$$E[X,Y]=1 * 1 * 1/6 + 1 * 2 * 1/12 + 2 * 1 * 1/12 + 2 * 2 * 1/6 = \frac{7}{6}$$

$$COV(X,Y)=E[X,Y]-E[X]*E[Y]=\frac{7}{6} - 1 * 1 = \frac{1}{6}$$

$$VAR[X]=0^2 * 1/3 + 1^2 * 1/3 + 2^2 * 1/3 - 1^2 = \frac{2}{3}$$

$$VAR[Y]=0^2 * 1/3 + 1^2 * 1/3 + 2^2 * 1/3 - 1^2 = \frac{2}{3}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{VAR[X]VAR[Y]}} = \frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{2}{3} * \frac{2}{3}}} = 0.25$$

**שאלה 5**

**שאלה 5**

השיא במשחה שליחים 4x100 הוא 200 שניות. קבוצה של ארבעה שחיינים מתאמנת לקראת תחרות שחיה. זמן השחיה ל-100 מטר של שחיינים אלה הוא בעל התפלגות נורמלית, עם הפרמטרים הנתונים בטבלה (בשניות):

שחייין	א	ב	ג	ד
תוחלת	51.8	50.2	51.0	52.1
סטיית תקן	1.2	2.0	1.1	1.3

א. מהי ההסתברות ששחייין א ישחה 100 מטר בפחות מ 50 שניות? (10 נק')  
 פתרון:

$$p(t_x < 50) = \phi\left(\frac{50 - 51.8}{1.2}\right) = \phi(-1.5) = 0.668$$

ב. מהי ההסתברות שהקבוצה תשבור את השיא במשחה שליחים 4x100? (10 נק')

נסמן ארבעה משתנים נורמליים  $X$ , וזמן של הקבוצה  $Y$

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4;$$

$$\mu = 51.8 + 50.2 + 51.0 + 52.1 = 205.1$$

$$\sigma^2 = 1.2^2 + 2.0^2 + 1.1^2 + 1.3^2 = 8.34$$

$$P(Y < 200) = \Phi\left(\frac{200 - 205.1}{\sqrt{8.34}}\right) = \Phi(-1.77) = 0.0384$$

ג. ידוע שקבוצה זו משיגה תמיד במשחה הגמר זמן טוב יותר מאשר במשחה המוקדמות. לאחר שבמשחה המוקדמות הייה זמן של הקבוצה 207 שניות, מהי ההסתברות שהיא תשבור את השיא במשחה הגמר? (5 נק')

$$P(Y < 200 / Y < 207) = \frac{P((Y < 200) \cap (Y < 207))}{P(Y < 207)} =$$

$$\frac{P(Y < 200)}{P(Y < 207)} = \frac{0.0384}{0.7454} = 0.0515$$

**בהצלחה!**