

מבחן בקורס – "הסתברות וסטטיסטיקה" - (20019)

מרצים: ד"ר ולדימיר אילייבסקי, ד"ר אלכס קפלונובסקי,

אחראי על הקורס: ד"ר אלעד שגב.

תאריך המבחן: תשע"ה סמסטר קיץ מועד ב' 21.10.2015

הוראות המבחן:

- משך המבחן 3 שעות.
- עליך לפתור סה"כ 4 (ארבע) שאלות מתוך 5. הסבר/י ונמק/י את תשובותיך. תשובה מספרית יש לתת בשלוש ספרות אחרי הנקודה.
- נא לרשום בראש המחברת אלו שאלות יש לבדוק.
- חומר עזר מוגבל – חומר לימוד מהרצאות ודפי נוסחאות סטנדרטיים מודפסים מאתר הקורס בכתובת: <http://www.hit.ac.il/ac/files/Eugene.Kanzieper/teaching/ps/ps.htm>
- מותר להשתמש במחשבון פשוט.

שאלה 1

קבוצה של 11 אנשים שמתוכם 6 גברים והשאר נשים בוחרים ועד של 5 אנשים. בועד אין תפקידים שונים.

א. מהו מספר הועדים השונים שניתן לבחור? (10 נק')

$$C_{11}^5$$

ב. מהי ההסתברות שלועד יבחרו בדיוק שני גברים? (10 נק')

$$\frac{C_6^2 \cdot C_5^3}{C_{11}^5} = 0.325$$

ג. מהי ההסתברות שלועד יבחרו בדיוק שני גברים אם גבר מסוים ואשה מסוימת אינם מוכנים להיות יחד בועד? (5 נק')

$$\frac{C_6^2 C_5^3 - C_5^1 C_4^2}{C_{11}^5}$$

שאלה 2

מהירות מותרת בכביש 4 היא 100km/hr . על הכביש נוסעים רכבים פרטיים, מסחריים ומשאיות. מהירות של רכבים מתפלגת נורמלי. תוחלת מהירות של רכב פרטי בכביש זה היא 110km/hr , תוחלת מהירות של רכב מסחרי 100km/hr ותוחלת מהירות של משאית היא 80km/hr . סטיית התקן של מהירות לרכב פרטי, מסחרי ולמשאית בהתאמה 20km/hr , 10km/hr , 40km/hr .

על הכביש הותקנה מצלמת מהירות שמוציאה דו"ח לכל מי שעובר את המהירות של 120km/hr

א. מהי ההסתברות שנהג רכב פרטי יקבל קנס? (10 נק')

נסמן:

A - נבדק רכב פרטי

B - נבדק רכב מסחרי

C - נבדקת משאית

v_A, v_B, v_C - מהירויות מתאימות

v - מהירות רכב כלשהו

$$p(v_A > 120) = 1 - \phi\left[\frac{120 - \mu(v_A)}{\sigma(v_A)}\right] = 1 - \phi\left[\frac{120 - 110}{20}\right] = 1 - \phi(0.5) = 0.3085$$

ב. ידוע שעל הכביש מספר שווה של רכבים פרטיים, מסחריים ומשאיות. נבחר באופן אקראי נהג שקיבל דו"ח, מהי ההסתברות שזהו נהג של רכב פרטי? (10 נק')

$$p(v_B > 120) = 1 - \phi\left[\frac{120 - \mu(v_B)}{\sigma(v_B)}\right] = 1 - \phi\left[\frac{120 - 100}{10}\right] = 1 - \phi(2) = 0.0228$$

$$p(v_C > 120) = 1 - \phi\left[\frac{120 - \mu(v_C)}{\sigma(v_C)}\right] = 1 - \phi\left[\frac{120 - 80}{40}\right] = 1 - \phi(1) = 0.1587$$

ברור ש:

$$p(v > 120|A) = p(v_A > 120)$$

$$p(v > 120) = p(v > 120|A)p(A) + p(v > 120|B)p(B) + p(v > 120|C)p(C)$$

$$= \frac{1}{3}(p(v_A > 120) + p(v_B > 120) + p(v_C > 120)) = 0.1653$$

$$p(A|v > 120) = \frac{p(v > 120|A)p(A)}{p(v > 120)} = 0.622$$

ג. נבחר באופן אקראי רכב פרטי ורכב מסחרי. מהי ההסתברות שמהירות של הרכב המסחרי תהיה גדולה ממהירות של רכב פרטי לכל היותר ב 10 km/hr ? (5 נק')

$$p(0 < v_2 - v_1 < 10)$$

$$v_2 - v_1 = V$$

$$\mu(V) = 100 - 110 = -10 \text{ km/hr}$$

$$\sigma(V) = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22.36$$

$$p(0 < V < 10) = \Phi\left[\frac{10 + 10}{22.36}\right] - \Phi\left[\frac{10}{22.36}\right] =$$

$$= \Phi\left[\frac{20}{22.36}\right] - \Phi\left[\frac{10}{22.36}\right] = \Phi[0.894] - \Phi[0.447] = 0.115$$

שאלה 3

פונקציית צפיפות הסתברות של משתנה מקרי רציף X נתונה ע"י נוסחה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{x}} + b, & 1 \leq x \leq 9 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

ידוע שהסתברות שמשתנה מקרי X מקבל ערכים בין 2.25 ל 4 :

$$p(2.25 \leq X \leq 4) = \frac{3}{16}$$

(א) מצאו פרמטרים a ו b ;

$$\int_1^9 \left(\frac{a}{\sqrt{x}} + b\right) dx = 1, \quad \int_{2.25}^4 \left(\frac{a}{\sqrt{x}} + b\right) dx = \frac{3}{16}$$

$$(2a\sqrt{x} + bx)_1^9 = 1, \quad (2a\sqrt{x} + bx)_{2.25}^4 = \frac{3}{16}$$

$$4a + 8b = 1, \quad a + 1.75b = \frac{3}{16}$$

$$a = -\frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{4}, & 1 \leq x \leq 9 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

(ב) מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת $F(t)$;

עבור $1 \leq x \leq 9$:

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_1^t \left(-\frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{4} \right) dx = \frac{1}{4} (-2\sqrt{t} + t + 1)$$

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ \frac{1}{4}(-2\sqrt{t} + t + 1), & 1 \leq t \leq 9 \\ 1, & t > 9 \end{cases}$$

(ג) חשבו $E[X]$ ו $P(2.25 \leq X \leq 4 | X \geq 1.21)$.

$$E(x) = \int_1^9 x \left(-\frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{4} \right) dx = 5.67$$

$$P(2.25 \leq X \leq 4 | X \geq 1.21) = \frac{\int_{2.25}^4 \left(-\frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{4} \right) dx}{\int_{1.21}^9 \left(-\frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{4} \right) dx} =$$

$$\frac{(-2\sqrt{x} + x)^4_{2.25}}{(-2\sqrt{x} + x)^9_{1.21}} = 0.188$$

עורכים סדרה של 4 ניסויי ברנולי בלתי תלויים שבכל אחד מהם יש הסתברות $p = 0.5$ להצלחה. מגדירים שני משתנים מקריים באופן הבא. X סופר את מספר הכשלונות עד להצלחה הראשונה, ובמידה ולא התקבלה הצלחה אז $X = 0$. Y סופר את מספר הכשלונות בין שתי הצלחות הראשונות. אם היו פחות משתי הצלחות אז $Y = 0$

(א) מצאו את $E[X]$ (10 נק')

גודל מרחב מדגם

$$|\Omega| = 2^4$$

נסמן הצלחה 1, כישלון 0. מאורעות הנדרשות נסמן ע"י סדרת ספרות 0 ו-1:

$X = 0$: 0000, 1000, 1010, 1001, 1011, 1100, 1110, 1101, 1111

$X = 1$: 0100, 0110, 0101, 0111

$X = 2$: 0011, 0010,

$X = 3$: 0001,

$$p(X = 0) = \frac{9}{16}, \quad p(X = 1) = \frac{4}{16}, \quad p(X = 2) = \frac{2}{16}, \quad p(X = 3) = \frac{1}{16}$$

$$E[X] = 0 + \frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16} = 0.6875$$

$$E[X^2] = 0 + \frac{4}{16} + \frac{8}{16} + \frac{9}{16} = 1.3125$$

$$\text{var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 0.84$$

(ב) מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y . (10 נק')

$Y = 0$: 0000, 0010, 0001, 1000, 0011, 0100, 0110, 0111, 1100, 1110, 1101, 1111

$Y = 1$: 1010, 1011, 0101,

$Y = 2:1001,$

Y	0	1	2	P(X)
X				
0	$\frac{6}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{9}{16}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{4}{16}$
2	$\frac{2}{16}$	0	0	$\frac{2}{16}$
3	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{1}{16}$
P(Y)	$\frac{12}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

(ג) חשבו את מקדם המתאם בין המשתנים המקריים X ו- Y . (5 נק')

$$E[Y] = 0 + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} = \frac{5}{16} = 0.3125$$

$$E[Y^2] = 0 + \frac{3}{16} + \frac{4}{16} = \frac{7}{16} = 0.4375$$

$$\text{var}[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 0.34$$

$$E[XY] = \frac{1}{16}$$

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{16} - \frac{55}{256} = -0.152$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}[X]\text{var}[Y]}} = -0.284$$

שאלה 5

במס הכנסה יושבים שני פקידיים. מספר האנשים המגיעים לכל אחד מן הפקידיים מתפלג פואסונית עם ממוצע של 3 אנשים ל- 30 דקות לפקיד הראשון וממוצע של 2 אנשים ל- 40 דקות לפקיד השני.

- א. (10 נק') מה ההסתברות שבמשך 30 דקות בדיוק שני אנשים התקבלו ע"י הפקיד הראשון?
 ב. (10 נק') מה ההסתברות שבמשך 30 דקות שני אנשים התקבלו ע"י הפקיד הראשון ושלושה ע"י הפקיד השני?
 ג. (5 נק') מהי ההסתברות שבמשך 30 דקות יתקבלו לפחות 2 אנשים ע"י שני הפקידים שעובדים במקביל?

פיתרון

א.

$$X \sim Poi(3)$$

$$P(X = 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} = 0.224$$

ב.

$$X \sim Poi(3), Y \sim Poi(1.5)$$

$$P(X = 2, Y = 3) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} \cdot \frac{1.5^3}{3!} e^{-1.5} = 0.0281$$

ג.

$$P(X + Y \geq 2) = 1 - P(X + Y < 2) = 1 - [P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1)]$$

$$= 1 - \left(\frac{e^{-3} 3^0}{0!} \cdot \frac{e^{-1.5} 1.5^0}{0!} + \frac{e^{-3} 3^1}{1!} \cdot \frac{e^{-1.5} 1.5^0}{0!} + \frac{e^{-3} 3^0}{0!} \cdot \frac{e^{-1.5} 1.5^1}{1!} \right) = 1 - 5.5e^{-4.5} = 0.94$$