דף נוסחאות

אקסיומות ההסתברות

1) תכונות כלליות של פונקצית הסתברות $P(A)$ כאשר A - מאורע כלשהו

Ω - מרחב מאורעות או אוסף כל התוצאות האפשריות של ניסוי או מאורע וודאי.

$P(\Phi)=0, \quad P(\Omega)=1, \quad 0\le P(A)\le 1$

2) $P(A)+P(\overline{A})=1 \quad , P(\overline{A})=1-P(A)$ כאשר $\overline{A}$ - מאורע משלים $\left(A\cup\overline{A}=\Omega\right)$

3) $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

4) A,B מאורעות זרים אם $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\Phi$

נוסחאות שימושיות נוספות:

5) $P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$

6) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B}) \quad , P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})$ (דה מורגן)

הסתברות מותנית

$P(A/B)$ - קוראים: ההסתברות המותנה של מאורע A כאשר ידוע שהמאורע B התרחש (בקיצור, ההסתברות של A בתנאי B).

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

אם A,B מאורעות בלתי תלויים אז מתקיים $P(A/B)=P(A) \quad , \quad \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{B})$

נוסחת ההסתברות השלמה: $P(A)=P(A/E_1)\cdot P(E_1)+\ldots+P(A/E_n)\cdot P(E_n)$

כאשר $E_1,E_2,\ldots,E_n$ מאורעות זרים בזוגות שאיחודם הוא כל המרחב Ω: $\sum_{i=1}^{n}P(E_i)=1$

נוסחת בייז : $P(A/B)=\frac{P(A)\cdot P(B/A)}{P(B)}$

$$P(E_1/A)=\frac{P(A/E_1)\cdot P(E_1)}{P(A)}=\frac{P(A/E_1)\cdot P(E_1)}{P(A/E_1)\cdot P(E_1)+\ldots+P(A/E_n)\cdot P(E_n)}$$

נוסחה נוספת: $P(\overline{A}/B)=1-P(A/B)$

קומבינטוריקה

תמורות

$$P_n=n!; \qquad P_n(n_1,n_2,\ldots,n_k)=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$$

בחירות

	עם החזרה	בלי החזרה
סדר חשוב (חליפות)	n^k	$P_n^k = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
סדר לא חשוב (צירופים)	$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

<u>מומנטים למשתנה בדיד</u>

תוחלת $\mu = E[x] = \sum x_i P(x_i)$

תוחלת של פונקציה $E[g(x)] = \sum g(x_i) P(x_i)$

שונות $\sigma^2 = Var[x] = E[(x-\mu)^2] = \sum (x-\mu)_i P(x_i) = E[x^2] - (E[x])^2$

תכונות של תוחלת ושונות:

$E(b \cdot X + a) = b \cdot E(X) + a, \quad Var(b \cdot X + a) = b^2 \cdot Var(X), \quad E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

מומנת של דרגה k $M_1 = E[x] = \mu; \quad M_k = E[x^k] = \sum x_i^k P(x_i)$

מומנת מרכזי של דרגה k $M_k^0 = E[(x-\mu)^k] = \sum (x-\mu)_i^k P(x_i)$

נוסחת מומנטים השלמה

נתונים קבוצה שלמה של מאורעות זרים $\{A_1, \dots, A_n\}$. X משתנה מקרי כלשהו אזי:

$$M[X] = \sum M[X / A_i] P(A_i)$$

<u>התפלגות אחידה</u> $X \sim U_d(a,b)$

$$P(X = k) = \frac{1}{N} \quad (N = b - a + 1, \ k = a, a+1, \dots, b);$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2}; Var[X] = \frac{N^2 - 1}{12}$$

<u>התפלגות וניסוי ברנולי</u> $X \sim Ber(p)$

$$X = \begin{cases} 1, & P(x=1) = p \\ 0, & P(x=0) = 1-p \end{cases}$$

<u>התפלגות בינומית</u> $X \sim Bin(n,p)$

n - מספר ניסויים, p - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, נסמן: $q=1-p$.

ההסתברות שמתוך n ניסויים יהיו בדיוק k הצלחות: $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$

תוחלת ושונות של התפלגות בינומית: $E(X)=np$, $VAR(X)=npq$

משפט הפירוק: נתונים $X_1, X_2, \dots, X_k$ משתנים מקריים בלתי תלויים כך ש- $X_i \sim Ber(p)$ עם אותה הסתברות p. אזי $X=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n,p)$.

<u>התפלגות גיאומטרית</u> (עד הצלחה ראשונה) $X \sim G(p)$

p - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, נסמן: $q=1-p$

ההסתברות שההצלחה הראשונה תתרחש בניסוי מס' k: $P(X=k)=q^{k-1}\cdot p$

$P(X \le k)=1-q^k$, $P(X>k)=q^k$, $E(X)=\frac{1}{p}$, $VAR(X)=\frac{1-p}{p^2}$

סכום של סדרה הנדסית אינסופית: $(q<1)$ $S=a+aq+aq^2+\dots=\frac{a}{1-q}$

<u>התפלגות בינומית שלילית</u> (מספר ניסיונות עד הצלחה מספר r) $X \sim NegBin(r,p)$

p - הסתברות של הצלחה בכל ניסוי בודד, נסמן: $q=1-p$

ההסתברות לכך שההצלחה מספר r יבוא בניסוי מס' k: $P(X=k)=C_{k-1}^{r-1}p^r q^{k-r}$

$E(X)=\frac{r}{p}$, $VAR(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}$

הערה: התפלגות הגיאומטרית הוא מקרה פרטי של התפלגות בינומית שלילית, עם $r=1$.

נתונים $X_1, X_2, \dots, X_r$ משתנים מקריים גיאומטריים בלתי תלויים כך ש- $X_i \sim G(p)$ עבור כל $1 \le i \le r$, אזי $X=\sum_{i=1}^{r} X_i \sim NegBin(r,p)$.

<u>התפלגות היפרגאומטרית</u>

באוכלוסיה N פריטים, מתוכם D פריטים מיוחדים. מוציאים מהאוכלוסייה n פריטים **ללא החזרה**. X = מספר פריטים מיוחדים שהוצאו.

ההסתברות שמתוך n פריטים יהיו k פריטים מיוחדים: $P(X=k)=\frac{C_D^k \cdot C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$.

תוחלת ושונות:

$$E(X)=n\cdot\frac{D}{N} \qquad VAR(X)=n\cdot\frac{D}{N}\cdot\left(1-\frac{D}{N}\right)\cdot\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$$

<u>התפלגות פואסון</u>

התפלגות פואסון עם פרמטר λ: $X \sim P(\lambda)$

λ הוא המספר הממוצע של האירועים ליחידת זמן, $\lambda>0$

ההסתברות שביחידת הזמן יתרחשו בדיוק k אירועים היא: $P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$

תוחלת ושונות: $E(X)=\lambda$, $VAR(X)=\lambda$

קירוב פואסון לבינומית (עבור n גדול ו p קטן) מציבים $\lambda = np$

<u>משתנה מקרי רציף</u>

f (x) פונקצית צפיפות, $a<x<b$, F (x) פונקצית ההתפלגות מצטברת $P(x<t)=F_x(t)$

.

$\int_a^b f(x)dx=1$, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $F'(x)=f(x)$, $F(a)=0$, $F(b)=1$,

F(x) אינה יורדת, כלומר אם: $a\le c<d\le b$ אז $F(c)\le F(d)$.

$$P(c<X<d)=\int_c^d f(x)dx=F(d)-F(c) \quad , \quad P(X<c)=\int_a^c f(x)dx=F(c)$$

$$E(X)=\int_a^b x\cdot f(x)dx,\ Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2,\ E(X^2)=\int_a^b x^2\cdot f(x)dx,$$

<u>התפלגות אחידה</u> $X\sim U_c(a,b)$

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\quad (a\le x\le b);\quad P(X\le t)=\frac{t-a}{b-a}$$

$$E[X]=\frac{a+b}{2};Var[X]=\frac{(b-a)^2}{12}$$

<u>התפלגות מעריכית</u> $X\sim \exp(\lambda)$

פונקצית הצפיפות של X היא: $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ כאשר $x\ge 0$.

פונקצית ההתפלגות של X היא: $F(t)=P(X\le t)=1-e^{-\lambda t}$

$$VAR(X)=\frac{1}{\lambda^2},\quad E(X)=\frac{1}{\lambda},$$

הערה: אם $X\sim Poi(\lambda)$ אזי Y– זמן עד מאורה הראשון מתפלג מעריכית $X\sim \exp(\lambda)$

<u>התפלגות נורמלית</u> (גאוס) $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

X הוא משתנה נורמלי עם פרמטרים μ ו- σ, אם פונקצית הצפיפות שלו ניתנת על ידי

סימונים: $E(X)=\mu$, $Var(X)=\sigma^2$.

אם $X\sim N(\mu,\sigma\ )$ אזי $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

פונקצית התפלגות של X היא: $P(X\le t)=\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$

כאשר $\Phi(t)=P(Z\le t)$ היא פונקצית ההתפלגות המצטברת של המשתנה הנורמלי הסטנדרטי

והיא נתונה בטבלה. תכונות של פונקצית $\Phi(t)$:

$.\ z_{1-\alpha} = -z_{\alpha}$, $P(t_1 < z < t_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1)$, $P(-a < Z < a) = 2\Phi(a) - 1$

$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$, $P(Z > t) = 1 - P(Z \le t)$

משפט הגבול המרכזי

יהיו $X_1, \ldots, X_n$ - משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ ושונותה σ^2 אזי

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le t\right) = \Phi\left(\frac{t - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$ כאשר X רציף

או $$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le k\right) = \Phi\left(\frac{k + 1/2 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$ כאשר X בדיד ומקבל ערכים שלמים

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2 / n) \quad \text{או} \quad P\left(\bar{X} \le t\right) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$$

קירוב נורמלי למשתנה בינומי

יהי X משתנה בינומי בעל פרמטרים n ו- p כלומר $X \sim B(n,p)$, אזי עבור n מספיק גדול $(n > 30)$ מתקיים:

$$X \sim N(np, np(1-p));\ P(X \le k) = \Phi\left(\frac{k + 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

סכום והפרש התפלגויות נורמליות

יהיו X ו- Y משתנים מקריים נורמליים בלתי תלויים כך ש: $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2);\ Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

אזי מתקיים: $X \pm Y \sim N(\mu_x \pm \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_x - \mu_y, \frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}\right);\ P(\bar{X} - \bar{Y} \le t) = \Phi\left(\frac{t - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}}\right)$$

__רווח בר- סמך לממוצע כאשר סטיית התקן ידועה:__

μ - **ממוצע** האוכלוסייה, σ^2 - שונות האוכלוסייה, σ - סטיית התקן של האוכלוסייה.

$\bar{x}$ - ממוצע המדגם, α - רמת המובהקות, $1-\alpha$ רמת הביטחון, n - גודל המדגם

__רווח בר-סמך__ ל- μ :

$$\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\frac{\alpha}{2} \qquad \bar{x}-\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x}+\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{\sqrt{n}};$$

גודל המדגם הדרוש כדי שברמת בטחון $1-\alpha$, הסטייה בין μ לבין $\bar{\mathrm{X}}$ לא תעלה על $\varepsilon = \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{\sqrt{n}}$

הוא:

$$n \ge \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

__רווח בר-סמך להפרש ממוצעי שתי אוכלוסיות כאשר שתי השונויות $\sigma_{\mathrm{x}}^2, \sigma_{\mathrm{y}}^2$ ידועות__

$$\bar{X}-\bar{Y}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}} \le \mu_1-\mu_2 \le \bar{X}-\bar{Y}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

__רווח בר- סמך לפרופורציות__

ברמת סמך $1-\alpha$ עבור פרופורציה p של "הצלחות" באוכלוסייה

ניתן על ידי:

$$\hat{p}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

כאשר $\hat{\mathrm{p}}=\mathrm{X}/\mathrm{n}$ היא פרופורציית ה"הצלחות" במדגם בגודל n.

גודל המדגם המבטיח שברמת סמך $1-\alpha$ הסטייה בין p לבין $\hat{\mathrm{p}}$ (חצי אורך הרווח) לא תעלה

על ε האו:

$$n \ge \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2\cdot\hat{p}(1-\hat{p})}{\varepsilon^2}$$

או כאשר $\hat{\mathrm{p}}$ אינה ידועה

$$n \ge \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\varepsilon}\right)^2$$

<u>אינטגרציה וגזירה בחלקים:</u>

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$
$$[u(x)/v(x)]' = [u'(x)v(x) - v'(x)u(x)]/v^2(x)$$
$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int v'(x)u(x)dx$$

Table of the standard normal distribution values

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998