מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

כ"ז בְּתַמּוּז תשע"ו
02.08.2016

סמסטר: ב'
מועד: ב'

מבחן ב"הסתברות למהנדסים" – 20019

מרצים: פרופ' יוג'ין קנציפר, ד"ר אלכסנדר קפלונובסקי

❖ הוראות המבחן

1. משך המבחן 3 שעות.
2. עליך לפתור סה"כ **3 (שלוש)** שאלות מתוך 5 שאלות. הסבר/י ונמק/י את תשובותיך.
3. נא לרשום בראש המחברת אילו שאלות יש לבדוק.
4. חומר עזר מוגבל – חומר לימוד ודפי נוסחאות סטנדרטיים מודפסים מאתר הקורס בכתובת: http://www.hit.ac.il/acc/eugene.kanzieper/teaching/ps/ps.htm.
5. מותר להיעזר במחשבון.
6. **בהצלחה!**

❖ ❖ ❖

❖ שאלה מס' 1

ליוג'ין שני גפרורים – האדום (R) והשחור (B). אורכם של גפרורים, X_{R} ו-X_{B}, מהווים משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה: $X_{\mathrm{R}} \sim \mathrm{U_c}(0, L_1)$ ו-$X_{\mathrm{B}} \sim \mathrm{U_c}(0, L_2)$. יוג'ין בוחר גפרור באופן הבא: הוא מטיל מטבע מוטה ($P(\text{"עץ"}) = p$). אם התקבלה תוצאה "עץ", יוג'ין בוחר בגפרור האדום ואם התקבלה תוצאה "פלי" – הוא בוחר בגפרור השחור.

יהיה משתנה מקרי $Y = \{$אורך הגפרור הנבחר$\}$. בהנחה כי $L_1 < L_2$:

א. מצא/י את פונקציית ההתפלגות המצטברת $F_Y(t)$ של Y ושרטט/י אותה. **[12 נק']**

ב. מצא/י את פונקציית צפיפות ההסתברות $f_Y(t)$ של Y, שרטט/י אותה וודא/י כי תכונת הנרמול מתקיימת. **[9 נק']**

ג. אם ידוע כי אורך הגפרור הנבחר לא עולה על L_1 (כלומר, אם ידוע כי $Y < L_1$), מה ההסתברות שצבעו שחור? **[12 נק']**

❖ שאלה מס' 2

נתבונן במשתנים מקריים בלתי תלויים $X_1, X_2, \ldots, X_n$ אשר יכולים לקבל ערכים שלמים ומפולגים באופן זהה. נתון כי ההסתברות שמשתנה X_j מקבל ערך זוגי הינה $P(X_j = \mathrm{even}) = p_0$ עבור כל j.

מצא/י:

א. $P(X_1 + X_2 = \mathrm{even})$ **[8 נק']**;

ב. $P(X_1 + X_2 + X_3 = \mathrm{even})$ **[10 נק']**;

ג. $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \mathrm{even})$ **[15 נק']**.

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026560, פקס' 03-5026619
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6560, Fax. 972-3-502-6619
הפקולטה למדעים
Faculty of Sciences

❖ **שאלה מס׳ 3**

יהיו X_1 ו—X_2 שני משתנים מקריים בדידים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה: $X_1 \sim \mathrm{U_d}(1, N)$ ו—$X_2 \sim \mathrm{U_d}(1, N)$.

א. מצא/י את ההסתברויות הבאות: $P(X_1 = X_2)$, $P(X_1 < X_2)$, $P(X_1 > X_2)$. **[12 נק׳]**

ב. נגדיר משתנה מקרי חדש $Y = \min(X_1, X_2)$. מצא/י את פונקציית ההסתברות שלו וודא/י כי תכונת הנרמול מתקיימת. **[15 נק׳]**

ג. חשב/י את התוחלת $\mathbb{E}[Y]$. **[6 נק׳]**

<u>הערה</u>. לידיעתך:

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

❖ **שאלה מס׳ 4**

משתנה מקרי רציף X מתואר על ידי פונקציית התפלגות מצטברת

$$F_X(t) = \begin{cases} a, & t < -1; \\ b\,t + c, & -1 \le t < 0; \\ d\,e^{-t} + f + g\,e^{t}, & t \ge 0. \end{cases}$$

א. האם יתכן שהפרמטר $b < 0$? האם יתכן שהפרמטר $b > 1$? יש לנמק את תשובותיך באופן <u>מפורט</u>! **[8 נק׳]**

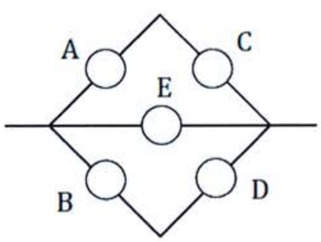
ב. מצא/י את כל הפרמטרים a, b, c, d, f, g אם נתון כי $\mathbb{E}[X] = 0$, חשב/י את פונקציית צפיפות ההסתברות $f_X(t)$ ושרטט/י אותה. **[12 נק׳]**

ג. בהינתן הפרמטרים שמצאת בסעיף ב׳, חשב/י את השונות $\mathrm{var}[X]$. **[5 נק׳]**

ד. בהינתן הפרמטרים שמצאת בסעיף ב׳, חשב/י את ההסתברות $P(X < 2 \,/\, X > 1)$. **[8 נק׳]**

❖ **שאלה מס׳ 5**

מעגל חשמלי מורכב מחמש יחידות הפועלות ללא תלות אחת בשנייה בהסתברות p (ראה/ראי ציור). יהיה X משתנה מקרי המתאר את מספר היחידות הפועלות במעגל.



אם ידוע כי מעגל כולו פועל, מה ההסתברות המותנית:

א. שאין יחידות פועלות במעגל ($X = 0$)? **[3 נק׳]**

ב. שפועלת רק יחידה אחת ($X = 1$)? **[6 נק׳]**

ג. שפועלות בדיוק שתי יחידות ($X = 2$)? **[6 נק׳]**

ד. שפועלות בדיוק שלוש יחידות ($X = 3$)? **[6 נק׳]**

ה. שפועלות בדיוק ארבע יחידות ($X = 4$)? **[6 נק׳]**

ו. שפועלות כל היחידות ($X = 5$)? **[3 נק׳]**

ז. חשב/י את סכום ההסתברויות בסעיפים א׳ עד ו׳ ותסביר/י את התוצאה. **[3 נק׳]**

בהצלחה!

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026560, פקס׳ 03-5026619
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6560, Fax. 972-3-502-6619
הפקולטה למדעים
Faculty of Sciences

#1

$$Y = \begin{cases} X_R, & \text{בהסתברות } p \\ X_B, & \text{בהסתברות } 1-p \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} X_R &\sim U_c(0, L_1) \\ X_B &\sim U_c(0, L_2) \end{aligned}\right\} \text{ מ.מ. בלתי תלויים} \qquad L_1 < L_2$$

A.

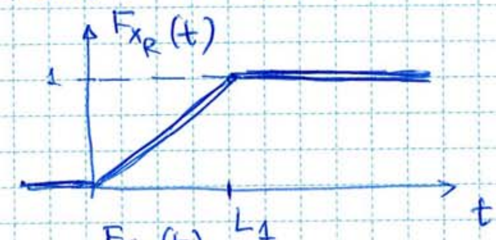
$$F_Y(t) = P(Y \le t) \overset{\text{בהסתברות}}{\underset{\text{שלמה}}{=}} P\left(Y \le t \,/\, \text{נבחר גפרור אדום}\right) P\left(\text{נבחר אדום}\right)$$

$$+ P\left(Y \le t \,/\, \text{נבחר גפרור שחור}\right) \cdot P\left(\text{נבחר שחור}\right) =$$

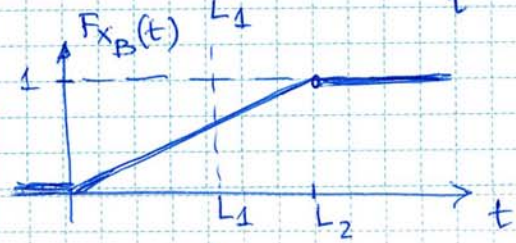
$$= P(X_R \le t) \cdot p + P(X_B \le t) \cdot (1-p)$$

עבור מ.מ בעלי התפלגות אחידה מתקיים:

$$F_{X_R}(t) = P(X_R \le t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t}{L_1}, & 0 \le t < L_1 \\ 1, & t \ge L_1 \end{cases}$$

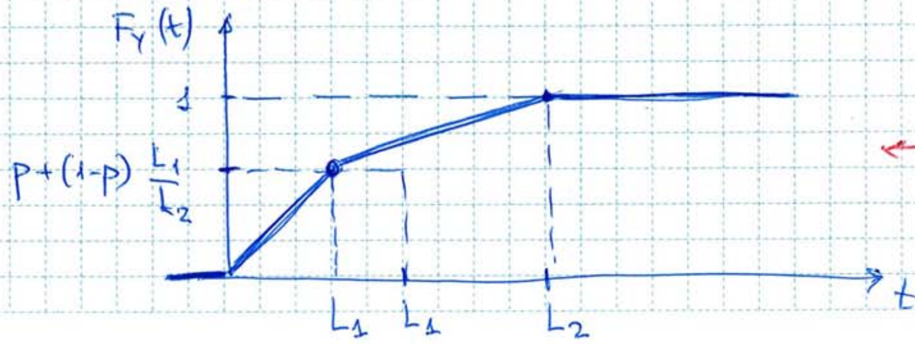


$$F_{X_B}(t) = P(X_B \le t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t}{L_2}, & 0 \le t < L_2 \\ 1, & t \ge L_2 \end{cases}$$



כתוצאה

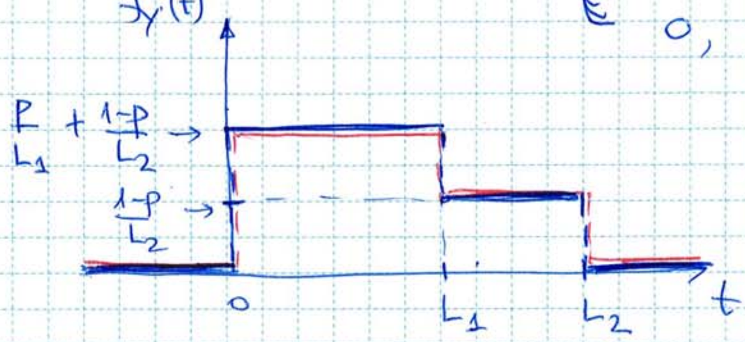
$$\Rightarrow \boxed{F_Y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ p\frac{t}{L_1} + (1-p)\frac{t}{L_2}, & 0 \le t < L_1 \\ p + (1-p)\frac{t}{L_2}, & L_1 \le t < L_2 \\ 1, & t \ge L_2 \end{cases}}$$



← רציפה

B

$$f_Y(t)=\frac{d}{dt}F_Y(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{p}{L_1}+\frac{(1-p)}{L_2}, & 0\le t<L_1 \\ \frac{(1-p)}{L_2}, & L_1\le t<L_2 \\ 0, & t\ge L_2 \end{cases}$$



בדיקת נרמול - חישוב שטחים:

$$L_1\cdot\left\{\frac{p}{L_1}+\frac{1-p}{L_2}\right\}+$$
$$+(L_2-L_1)\cdot\frac{1-p}{L_2}\equiv 1$$

C

$$\boxed{P\left(\text{נבחר שחור}/Y\le L_1\right)}\overset{\text{בייס}}{=}\frac{P\left(Y\le L_1/\text{נבחר שחור}\right)\cdot P\left(\text{נבחר שחור}\right)}{P(Y\le L_1)}$$

$$=\frac{P(X_B\le L_1)\cdot(1-p)}{F_Y(t=L_1)}=\boxed{\frac{\frac{L_1}{L_2}(1-p)}{p+\frac{L_1}{L_2}(1-p)}}$$

#2 **A**

רק כאשר X_1+X_2 יהיה זוגי

אם $\underbrace{\text{שניהם זוגיים}}_{p_0^2}$ או $\underbrace{\text{שניהם אי-זוגיים}}_{(1-p_0)^2}$;

לומר,

$$\boxed{P(X_1+X_2=even)=p_0^2+(1-p_0)^2.}$$

B

כל האפשרויות המובילות ל- $X_1+X_2+X_3=$ זוגי

מפורטות בטבלה:

X_1	e	e	o	o
X_2	e	o	e	o
X_3	e	o	o	e
	p_0^3	$p_0(1-p_0)^2$	$\times 3$	

e = even = זוגי

o = odd = אי זוגי

כתוצאה,
$$\boxed{P(X_1+X_2+X_3=\text{even}) = p_0^3 + 3p_0(1-p_0)^2.}$$

ב. על מנת להבטיח כי $X_1+X_2+\dots+X_n =$ זוגי,
אנו צריכים להבטיח כי מספר ה-X_j "אי-זוגיים"
בסכום הוא זוגי.

נסמן מספר אי-זוגיים בסכום כ-Y. קל לראות
כי $Y\sim Bin(n,1-p_0)$. משמעות הדבר היא ש-Y
מקבל את הערכים $k=0,1,\dots,n$ בהסתברויות
$P(Y=k)=C_n^k\,(1-p_0)^k\,p_0^{n-k}$.

אזי:

$$P(X_1+X_2+\dots+X_n=\text{even}) = P(Y=\text{even})$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1+(-1)^k}{2}P(Y=k) =$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k P(Y=k).$$

כתוצאה בינום של ניוטון, אנו מקבלים:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k P(Y=k)=\sum_{k=0}^{n}(-1)\,C_n^k\,(1-p_0)^k\,p_0^{n-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,(p_0-1)^k\,p_0^{n-k} \equiv (2p_0-1)^n.$$

כתוצאה,

$$\boxed{P(X_1+\dots+X_n=\text{even}) = \frac{1}{2}\left[1+(2p_0-1)^n\right].}$$

#3

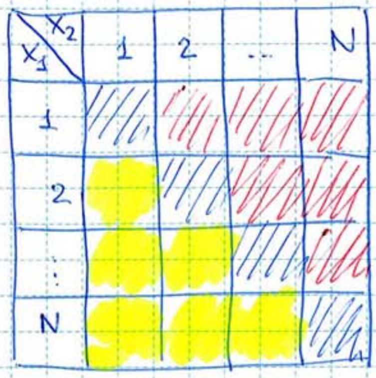
$$\left.\begin{aligned} X_1 &\sim U_d(1,N) \\ X_2 &\sim U_d(1,N) \end{aligned}\right\} \text{בלתי תלויים}$$

סיכויים שווים

$k = 1, 2, \dots, N$

$$P(X_1 = k) = \frac{1}{N} = P(X_2 = k)$$

A



$$P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{N} P(X_1 = k)P(X_2 = k)$$

$$= \frac{1}{N^2} \cdot N = \frac{1}{N}$$

$$P(X_1 < X_2) = \frac{1}{N^2} \cdot \frac{N^2 - N}{2} = \frac{N-1}{2N}$$

: $X_1 = X_2$ (~~X~~ תאים N)

: $X_1 < X_2$ ($\frac{N^2-N}{2}$ תאים)

: $X_1 > X_2$ ($\frac{N^2-N}{2}$ תאים)

$$P(X_1 > X_2) = \frac{1}{N^2} \cdot \frac{N^2 - N}{2} = \frac{N-1}{2N}$$

סיכום!

$$\boxed{P(X_1 = X_2) = \frac{1}{N}; \quad P(X_1 < X_2) = \frac{N-1}{2N}; \quad P(X_1 > X_2) = \frac{N-1}{2N}}$$

B

$$P(Y = k) \overset{\text{הסתברות}}{\underset{\text{שלמה}}{=}} P(Y = k / X_1 = X_2)\,P(X_1 = X_2)$$

$$+ P(Y = k / X_1 < X_2)\,P(X_1 < X_2)$$

$$+ P(Y = k / X_1 > X_2)\,P(X_1 > X_2) \qquad (*)$$

$\underline{\underline{Y = \min(X_1, X_2)}}$ כאן

נחשב את שלושת ההסתברויות בנפרד:

(1) $$\boxed{P(Y=k / X_1=X_2)\cdot P(X_1=X_2)} = P(\min(X_1,X_2)=k / X_1=X_2)\, P(X_1=X_2)$$

$$= P(X_1=k \cap X_1=X_2) = P(X_1=k)\,P(X_2=k) \boxed{= \frac{1}{N^2}}$$

(2) $$\boxed{P(Y=k / X_1<X_2)\, P(X_1<X_2)} = P(\underbrace{\min(X_1,X_2)}_{X_1}=k / X_1<X_2)$$

$$\cdot P(X_1<X_2) = P(X_1=k / X_1<X_2)\, P(X_1<X_2)$$

$$= P(X_1=k \cap X_1<X_2) = P(X_1=k \cap X_2>k)$$

$$= \underbrace{P(X_1=k)}_{\frac{1}{N}} \cdot \underbrace{P(X_2>k)}_{\frac{1}{N}(N-k)} \boxed{= \frac{N-k}{N^2}}$$

כמו שגלה בעמוד הקודם

(3)

חישוב דומה מביא:

$$\boxed{P(Y=k / X_1>X_2)\, P(X_1>X_2) = \frac{N-k}{N^2}}$$

הצבה תוך הנוסחה (*) בעמוד הקודם מביאה:

$$\boxed{P(Y=k)=} \frac{1}{N^2} + \frac{N-k}{N^2} + \frac{N-k}{N^2} \equiv \boxed{\frac{2N+1}{N^2} - \frac{2k}{N^2}}$$

<u>בדיקת נכונות!</u>

$$\sum_{k=1}^{N} P(Y=k) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{2N+1}{N^2}}_{\frac{2N+1}{N}} - \frac{2}{N^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} k}_{\frac{N(N+1)}{2}} =$$

$$= \frac{2N+1}{N} - \frac{2}{N^2} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = 1.$$

C. $$\mathbb{E}[Y]=\sum_{k=1}^{N}k\cdot P(Y=k)=\sum_{k=1}^{N}k\cdot\left(\frac{2N+1}{N^2}-\frac{2k}{N^2}\right)$$

$$=\frac{2N+1}{N^2}\underbrace{\sum_{k=1}^{N}k}_{\frac{N(N+1)}{2}}-\frac{2}{N^2}\underbrace{\sum_{k=1}^{N}k^2}_{\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[Y]=\frac{(N+1)(2N+1)}{6N}}$$

N [illegible]:

#4

$$F_X(t)=\begin{cases} a, & t<-1 \\ bt+c, & -1\le t<0 \\ d\cdot e^{-t}+f+g\cdot e^{t}, & t\geq 0. \end{cases}$$

A. * $\lim_{t\to-\infty}F_X(t)=0 \Rightarrow a=0.$

* $\lim_{t\to+\infty}F_X(t)=1 \Rightarrow f=1,\ g=0.$

* רציפות בנקודה $t=-1$: $c=b \Leftarrow 0=c-b$

* רציפות בנקודה $t=0$: $d=b-1 \Leftarrow c=d+1$

כעת,

$$F_X(t)=\begin{cases} 0, & t<-1 \\ b(t+1), & -1\le t<0 \\ 1+(b-1)\cdot e^{-t}, & t\geq 0. \end{cases}$$

$$f_X(t)=\frac{d}{dt}F_X(t)=\begin{cases} 0, & t<-1 \\ b, & -1\le t<0 \\ (1-b)e^{-t}, & t\geq 0. \end{cases}$$

* אם $b<0$, פ׳ צפיפות תהיה פ׳ שלילית וזה **לא** יתכן.
* אם $b>1$, אז כאן, פ׳ צפיפות תהיה שלילית וזה **לא** יתכן.

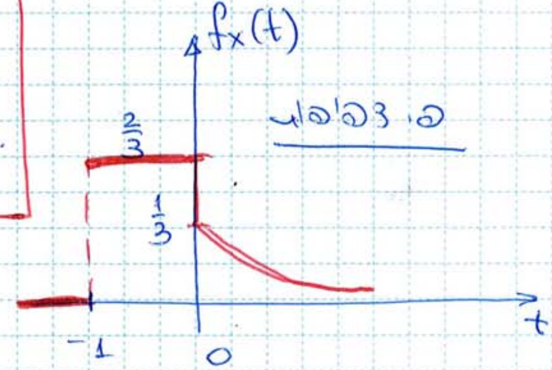
B

$$\mathbb{E}[X]=0 \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\,dt = \underbrace{\int_{-1}^{0} t\cdot b\,dt}_{-\frac{b}{2}} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} t\cdot(1-b)e^{-t}\,dt}_{(1-b)\,\Gamma(2)=1-b}$$

$$= -\frac{b}{2}+1-b = 1-\frac{3b}{2}=0 \Rightarrow \boxed{b=\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{f_X(t)=\begin{cases} 0, & t<-1 \\ \frac{2}{3}, & -1\le t<0 \\ \frac{1}{3}e^{-t}, & t\geq 0 \end{cases}}$$



C

$$Var[X]=\mathbb{E}[X^2]-(\mathbb{E}[X])^2=\mathbb{E}[X^2]$$

$$\mathbb{E}[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\,dt = \underbrace{\int_{-1}^{0} t^2\cdot\frac{2}{3}\,dt}_{\frac{2}{9}} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} t^2\cdot\frac{1}{3}e^{-t}\,dt}_{\frac{1}{3}\Gamma(3)=\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{2}{9}+\frac{2}{3}=\frac{8}{9} \Rightarrow$$

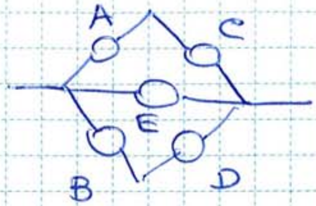
$$\boxed{Var[X]=\frac{8}{9}}$$

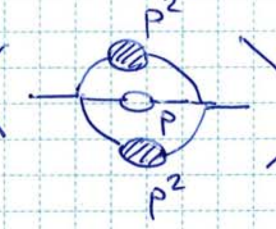
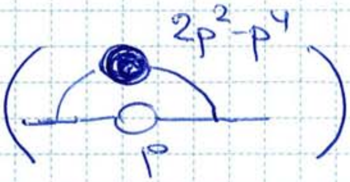
D. $\boxed{P(X<2 / X>1)=}\ \dfrac{P(X<2 \cap X>1)}{P(X>1)} = \dfrac{P(1<X<2)}{1-P(X<1)}$

$$=\frac{F_X(2)-F_X(1)}{1-F_X(1)} = \frac{1-\frac{1}{3}e^{-2}-\left(1-\frac{1}{3}e^{-1}\right)}{1-\left(1-\frac{1}{3}e^{-1}\right)}$$

$$=\frac{e^{-1}-e^{-2}}{e^{-1}} \Rightarrow \boxed{1-\frac{1}{e}}$$

#5

Q: 

$P(Q) = P\Big($  $\Big) = P\Big($  $\Big)$

$= p + (2p^2 - p^4) - p(2p^2 - p^4)$

A $\boxed{P(X=0/Q)} = \dfrac{\boxed{P(Q/X=0)}\, P(X=0)}{P(Q)} \boxed{=0}$

מכיון ש- $P(Q/X=0)=0$

B $P(X=1/Q) = \dfrac{P(Q/X=1)\, P(X=1)}{P(Q)} = P_1$

$= p(1-p)^4 \cdot \#_1$

$X=1 \leftarrow$ יחידה אחת בלבד פועלת.

האפשרויות הן:

	A	B	C	D	E	$\#_1$	חישוב
5	●	○	○	○	○	0	
	○	●	○	○	○	0	
	○	○	●	○	○	0	
	○	○	○	●	○	0	
	○	○	○	○	●	1	

סה"כ: 1

סימון: ● — פועלת

○ — לא פועלת

כתוצאה:

$$\boxed{P(X=1/Q) = \frac{1\cdot p(1-p)^4}{p+(2p^2-p^4)-p(2p^2-p^4)}}$$

c. $P(X=2/Q) = \frac{P(Q/X=2)\cdot P(X=2)}{P(Q)}$ $= P_2$

$= p^2(1-p)^3 \cdot \#_2$

$X=2 \leftarrow$ שני ומזהות מלבד פופולר

האפשרויות:

	A	B	C	D	E	$\#_2$ מיקום:
10	●	●	○	○	○	0
	●	○	●	○	○	1
	●	○	○	●	○	0
	●	○	○	○	●	1
	○	●	●	○	○	0
	○	●	○	●	○	1
	○	●	○	○	●	1
	○	○	●	●	○	0
	○	○	●	○	●	1
	○	○	○	●	●	1
					סה"כ:	6

$$\boxed{P(X=2/Q) = \frac{6p^2(1-p)^3}{p+(2p^2-p^4)-p(2p^2-p^4)}}$$

אוי!

D. $$P(X=3/Q)=\frac{P(Q/X=3)P(X=3)}{P(Q)}$$ P_3

$$P_3=p^3(1-p)^2\cdot \#_3$$

$X=3 \Leftarrow$ שלוש יחידות בלבד פגומות.

האפשרויות ניתנות ע"י הטבלה הקודמת לאחר החלפה: $\bullet \longleftrightarrow \circ$

ניתן לראות כי $\#_3=10$

כלומר,

$$\boxed{P(X=3/Q)=\frac{10p^3(1-p)^2}{p+(2p^2-p^4)-p(2p^2-p^4)}}$$

E. $$P(X=4/Q)=\frac{P(Q/X=4)\,p(X=4)}{P(Q)}$$ P_4

$$P_4=p^4(1-p)\cdot \#_4$$

$X=4 \Leftarrow$ בדיוק 4 יחידות פגומות.

האפשרויות ניתנות ע"י הטבלה בסעיף B

לאחר החלפה: $\bullet \leftrightarrow \circ$.

ניתן לראות כי $\#_4=5$

כלומר,

$$\boxed{P(X=4/Q)=\frac{5p^4(1-p)}{p+(2p^2-p^4)-p(2p^2-p^4)}}$$

F. באותה הגישה מקבלים:

$$\boxed{P(X=5/Q)=\frac{p^5}{p+(2p^2-p^4)-p(2p^2-p^4)}}$$

נחשב!

$$\sum_{j=0}^{5} P(X=j/Q) =$$

$$= \frac{0 + p(1-p)^4 + 6p^2(1-p)^3 + 10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5}{p + (2p^2-p^4) - p(2p^2-p^4)} \equiv 1.$$

התשובה צפויה לגמרי כי בהינתן שמאורע [illegible]
[illegible], המאורעות $\{X=0\}, \{X=1\}, \dots, \{X=5\}$
מהווים מרחב מדגם כולו: $P(\Omega)=1$.